Comment Lemaître établit magistralement la solution au problème du corps unique à symétrie sphérique dans un article fondamental de Cosmologie!

Cours SAF 2018: Par Jacques Fric

Introduction

- Si on peut douter que Painlevé ait vraiment compris l'intérêt de sa découverte, il n'en est pas de même pour Lemaître qui au terme d'une démonstration magistrale sur des solutions cosmologiques a considéré que celle du trou noir à symétrie sphérique en était un cas particulier.
- Cet article recèle encore aujourd'hui des richesses immenses que Lemaître n'a d'ailleurs pas complètement exploitées, en particulier pour la solution que nous étudions, qu'il a traité comme une annexe de sa réflexion.
- En respectant sa démarche nous nous attacherons à développer les points qu'il a laissé dans l'ombre, compte tenu de l'objectif qu'il s'était donné, mais riches en enseignements dans le cadre de l'analyse que nous conduisons.

Parcours scientifique de Lemaître

- Lemaître (1894-1966) né à Charleroi en Belgique commença sa carrière scientifique en 1913 à Louvain. Elle fût rapidement interrompue par la guerre. À la fin de la guerre, il entre au séminaire où pendant ses heures de loisirs il étudie les sciences et les mathématiques.

Parcours scientifique de Lemaître

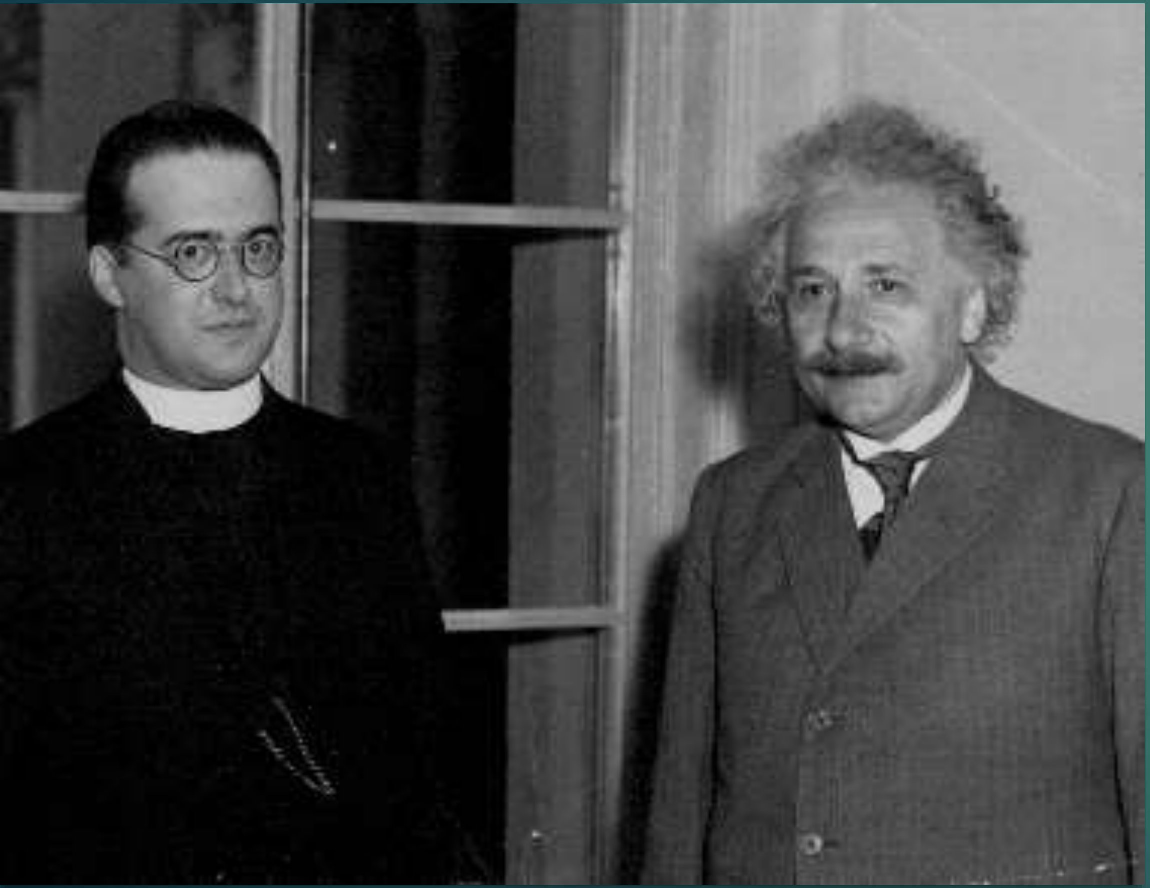
- Après son ordination il continue à étudier les mathématiques et les sciences à Cambridge où un de ses professeurs Arthur Eddington était le directeur de l'observatoire. Il s'intéresse en particulier à la relativité générale. De ses calculs il déduit que l'univers est dynamique mais à la différence d'Einstein qui avait introduit la constante cosmologique (dont le caractère répulsif pouvait exactement compenser le caractère attractif de la matière pour un ajustement bien précis des paramètres) pour le rendre statique, Lemaître est convaincu qu'il est en expansion en interprétant le décalage vers le rouge des galaxies comme un effet Doppler.

En 1927, il publie le fruit de ses calculs et réflexions dans un article des “Annales de la société scientifique de Bruxelles”, publication qui n’a pratiquement aucun écho. Il fait part de ses calculs à Einstein qu’il rencontre à Bruxelles la même année mais celui-ci lui objecte que si ses calculs sont justes par contre son approche physique du problème cosmologique est abominable (sic)!

En 1929 les observations de Edwin Hubble confirment le décalage systématique vers le rouge des galaxies.

En Angleterre la “Royal Society” s’émeut de la contradiction apparente entre les observations et ce que prédit la relativité générale dans le modèle d’Einstein, en oubliant au passage la contribution de Friedmann qui prévoyait un univers dynamique et ce dès 1922 et qu’Einstein qui en avait eu connaissance avait traité avec une certaine désinvolture.

- Sir Arthur Eddington se porte volontaire pour mener à bien cette redoutable mission. Prenant connaissance de cela, Lemaître envoie une copie de son article de 1927 à Eddington qui se rend compte que Lemaître propose une solution. Eddington fait traduire en anglais l’article de Lemaître et le fait publier dans les "Monthly Notices de la Royal Society" de mars 1931.



- Si la communauté scientifique accepte bien l’idée que l’univers est aujourd’hui en expansion, l’idée qu’il a eu un commencement les révulse, à commencer par Eddington qui trouve l’idée “répugnante”. Mais Lemaître qui ne se laisse pas décourager si facilement et en janvier 1933 il obtient enfin une reconnaissance d’Einstein, au cours d’une conférence en Californie, puisque à la fin de la présentation de Lemaître, Einstein se lève en applaudissant et déclare : " C’est l’explication la plus belle et la plus satisfaisante de la création que j’ai entendue".


PUBLICATIONS

DU LABORATOIRE

D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN

SECRÉTAIRE : M. G. LEMAITRE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Vol. IX (Nos 85 et 86)

1932

LOUVAIN

1933

Son article de Synthèse de 1932

Son article de Synthèse de 1932

- ***Les hypothèses de base***

- Pour établir les équations du mouvement des solutions cosmologiques de type “Friedmann” à partir des équations de la relativité générale, Lemaître définit une métrique générique diagonale à symétrie sphérique, co-mobile du fluide matière énergie, qui s’écrit :

  - $ds^2 = -a^2 d\chi^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + c^2 \, dt^2$

- Les coordonnées sont χ, coordonnée “radiale” (angle de développement dans le cas d’une hypersphère), θ et φ coordonnées angulaires sphériques et t coordonnée temporelle.

- Les paramètres a, r, c, sont des fonctions uniquement de χ et de t, car la forme est à symétrie sphérique et ne dépend donc pas de θ et φ. On peut les écrire $a(\chi, t)$, $r(\chi, t)$, $c(\chi, t)$.

- Il va, de plus, particulariser la métrique pour que le tenseur énergie-impulsion qui intervient dans l’équation d’Einstein soit diagonal. Le référentiel est alors co-mobile du fluide parfait matériel, ce qui fait que les hypersurfaces à temps constant vont être orthogonales aux géodésiques radiales suivies par les éléments infinitésimaux du fluide.
- Pour établir sa solution, en physicien avisé, Lemaître va rechercher et établir les invariants propres à cette solution à partir des équations de conservation décrivant la variation locale, par rapport aux coordonnées temporelles t et radiales χ d’une combinaison des paramètres de la matière et de la géométrie de l’espace-temps.

- Ces équations de conservation ($T^{\mu}{}_{\nu;\mu}=0$) se présentent sous forme de composantes du gradient d'une fonction scalaire $\Phi(\chi,t)$ qu'il va associer à la masse m contenue dans la sphère de paramètre radial χ, au temps t, en posant $m = -4i\pi\, \Phi(\chi,t)$.
- C'est par cette fonction de masse de la matière (indépendante de $T^2{}_2 = T^3{}_3 = -\tau$), qu'il a introduit fort opportunément à partir des équations de conservation qui s'écrivent alors,

$$4\pi \rho r^2 \frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{\partial m}{\partial \chi} \qquad 4\pi p r^2 \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t}$$

- dont l'interprétation physique n'est pas toujours triviale, où ρ est la densité du fluide caractérisant la matière énergie et p sa pression, qu'il va particulariser alors les solutions.
- Ces équations montrent que dans ces types d'univers, la condition de pression nulle implique que cette masse est indépendante de la coordonnée t.

- Lemaître est convaincu que les solutions cosmologiques fermées et sans pression de Friedmann, et la solution de Schwarzschild sont semblables.
- Il va donc particulariser cette forme générique en ajoutant une condition de pression nulle, la métrique générique s’écrit alors:

$$ds^2 = -\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 \left(\frac{d\chi}{f(\chi)}\right)^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2\right) + c^2 dt^2$$

- où *f(χ)* est une fonction caractérisant la géométrie spatiale de la solution. Ceci lui permet de disposer d’une forme particulière valide pour des types d’univers avec ou sans matière.
- Cette équation résulte simplement des calculs de Lemaître : équation *(8.1)* p.188 de Lemaître (1932).

- Le calcul, par intégration, de cette fonction scalaire de masse va nous révéler la forme générique de l'équation géodésique à pression nulle associée:

  - $(\partial r/\partial t)^2 = -c^2[1 - f^2(\chi)] + 2Gm/r + \lambda\, c^2r^2/3,$

- qui sera elle aussi particularisée, parallèlement à la métrique par les mêmes hypothèses, pour être adaptée aux différentes solutions.
- Ce seront les différences sur la fonction de masse qui vont faire que les formes avec ou sans matière vont se dissocier du tronc commun et donner deux solutions différentes. Rappelons que m ne dépendant pas de t et les univers considérés étant à symétrie sphérique, la fonction de masse ne peut dépendre que de la coordonnée radiale χ.

La solution cosmologique de Friedmann

- Pour la solution cosmologique de Friedmann, pour un univers fermé, Lemaître obtient la forme de la métrique connue:
  - $ds^2 = - R^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)] + c^2.dt^2,$
- en introduisant implicitement la condition d'homogénéité, en définissant une forme pour cette fonction de masse $m(\chi)$ qui traduit la proportionnalité de la masse au volume.
- Ici, c, est la vitesse de la lumière (constante), la variable t est donc le temps propre d'un observateur à coordonnée spatiale (co-mobile) constante. Notons qu'on pose souvent $c = 1$ dans ces équations. Nous verrons que ce caractère physique de la variable t va être préservé dans la solution au problème de Schwarzschild proposée par Lemaître.

Par contre, dans la solution de Schwarzschild, la masse étant ponctuelle, elle est indépendante de la coordonnée χ, ce qui va donner une autre forme de la métrique, nouvelle cette fois, qu'il va particulariser en supposant, *a priori*, la géométrie spatiale euclidienne ($f(\chi) = 1$) .

À ce stade, il faut noter un certain “flou” dans la démarche de Lemaître, puisque pour la solution cosmologique de Friedmann, il se réfère (à tort comme nous l'avons dit) toujours à la solution fermée, qui est la seule qu'il développe complètement.

- Pourtant, c’est avec la solution de Friedmann critique à sections spatiales euclidiennes, que Lemaître ne fait qu’évoquer dans son document, qui correspond à un univers infini, que phénoménologiquement, le lien structurel avec la solution de Schwarzschild existe.
- Cette forme peut s’écrire sous les formes suivantes :
- $ds^2 = - a^2 (t)[d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)] + c^2dt^2,$
- $ds^2 = - a^2 (t)[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)] + c^2dt^2,$
- $ds^2 = - a^2 (t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] + c^2dt^2$

- Considérons ce cas, avec la même masse *m* pour faire correspondre les deux solutions.

Phénoménologies comparées des solutions de Friedmann et de Schwarzschild

- **Comparaison des solutions pour des objets de masses égales**

- Considérons un observateur quelconque dans la solution de Friedmann critique, situé en O, qui observe le mouvement des particules sur une sphère S, de rayon χ, dont il est le centre.
- Il voit leur mouvement ralenti par l'action gravitationnelle de la masse contenue dans la sphère S. On peut choisir $\chi = \chi_m$ de sorte que cette masse soit égale à m.
- Comme χ_m est une coordonnée co-mobile, cette masse va rester égale à m à χ_m constant.

- Mais pour les particules à la surface de la sphère, compte tenu du théorème de Birkhoff, la phénoménologie du mouvement (par rapport à O) serait inchangée si au lieu d'une sphère *S* de matière homogène de masse *m*, la masse était concentrée au centre de symétrie.
- La solution cosmologique, avec $\chi = \chi_m$, présente exactement la même phénoménologie que la solution de Schwarzschild, mais ici inversée dans le temps ($t \rightarrow -t$), car dans un cas nous avons une expansion (ralentie par la matière) et dans l'autre cas une contraction accélérée.
- La solution cosmologique critique de Friedmann correspond à la région en expansion de la solution de Lemaître.

Horizon trou noir et horizon cosmologique dans la solution de Friedmann Lemaître

- Ces convergences entre les solutions s'appliquent également au cas des horizons.
- En effet, un univers de poussière (sans pression) de densité critique est caractérisé par :
  - $\Omega_m = (8\pi G\rho_0)/3H_0^2 = 1$, avec $c = 1$, où $\Omega_m = (\rho_m/\rho_{critique})$,
- est le rapport de la densité de matière à la densité critique.
- Par analogie avec le trou noir, définissons un « horizon » comme l'hypersurface située à une distance ***r*** de l'observateur, aujourd'hui, telle que $rH_0 = c$. Alors cet horizon fuit l'observateur à une vitesse égale à celle de la lumière, comme dans le cas du trou noir.

- Alors cet horizon fuit l’observateur à une vitesse égale à celle de la lumière, comme dans le cas du trou noir.
- En reportant on obtient
  - $8\pi G\rho_0 r^2/3 = 2G(4\pi\, r^2\rho_0)/3 = 2G.M/r = 1$
- d’où on déduit $r = 2GM$, comme pour un trou noir statique.
- L’analyse de Lemaître suggère de mettre en relation ces « horizons » pourtant dissemblables. L’horizon de la solution de Schwarzschild, qui est statique ou stationnaire, est à coordonnée radiale constante, dont l’origine est la singularité centrale. Il est le même pour tous les observateurs situés à l’extérieur de l’horizon. Il peut être traversé dans un sens par des observateurs. On peut lui attribuer un caractère physique.

- Dans le cas des solutions Friedmann Lemaître qui sont homogènes et non stationnaires cet « horizon » dépend de l’observateur et du temps.
- Par ailleurs, on définit un horizon causal, aujourd’hui, qui est en général également différent de celui d’hier et de celui de demain, par la distance (aujourd’hui) de la source du signal lumineux le plus ancien, compte tenu de l’âge de l’univers, qui nous a pu nous atteindre aujourd’hui.
- Cette définition, qui est rigoureuse, nécessite cependant de connaître intégralement la dynamique de l’univers entre l’instant d’émission du photon et sa réception. Le rôle de l’inflation primordiale, dans la causalité entre les régions éloignées de l’univers, modifie les données du problème, ce qui fait, qu’en pratique, un horizon physique de causalité n’est pas vraiment clairement défini dans le modèle standard cosmologique.

La Solution de Schwarzschild revisitée par Lemaître

- Il y a eu des contributions antérieures de forme de la métrique effaçant la singularité sur l'horizon (Painlevé en 1921, Gullstrand en 1922 et Eddington en 1924) mais, soit ces auteurs n'ont pas relevé cette caractéristique, soit ils n'ont pas expliqué que cette singularité n'était due qu'à un choix de coordonnées inadapté.
- Le début du chapitre 11 de son article « L'univers en expansion » montre que Lemaître a bien compris cela et explicite d'emblée que c'est cela qui pose problème et donne en conséquence une solution qui le résout.

11. Champ extérieur de Schwarzschild.

Les équations de l'univers de Friedmann admettent pour une masse non nulle, des solutions où le rayon de l'univers tend vers zéro. Ceci est en opposition avec le résultat généralement admis qu'une masse donnée ne peut avoir un rayon plus petit que

$$\frac{2Km}{c^2}$$

ou $2m$ en unités naturelles ($K = c = 1$).

Ce résultat se déduit de la solution du problème extérieur de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda}{3}r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda}{3}r^2\right)d\tau^2 \tag{11.1}$$

Nous nous proposons de montrer que la singularité du champ n'est pas réelle et provient simplement de ce qu'on a voulu employer des coordonnées pour lesquelles le champ est statique.

Équation géodésique de l'espace-temps

- Rappelons l'équation géodésique générique (8.2) que Lemaître a établi dans un contexte cosmologique .
  - $(\partial r/\partial t)^2 = -c^2[1 - f^2(\chi)] + 2Gm/r + \lambda\, c^2r^2/3,$
- En considérant le cas euclidien ($f^2(\chi)= 1$), et en posant:

$$r_0^3 = GM/\,4A^2 \quad \text{et } A^2 = \lambda c^2/3$$

- l'équation géodésique s'écrit :
  - $r(\partial r/\partial t)^2 = A^2(r^3+8r_0^3)$
- Le paramètre λ est la constante cosmologique, le rayon de courbure R vaut $(3/\lambda)^{1/2}$, donc $\lambda r^2 = r^2/R^2$.

Équation géodésique de l'espace-temps

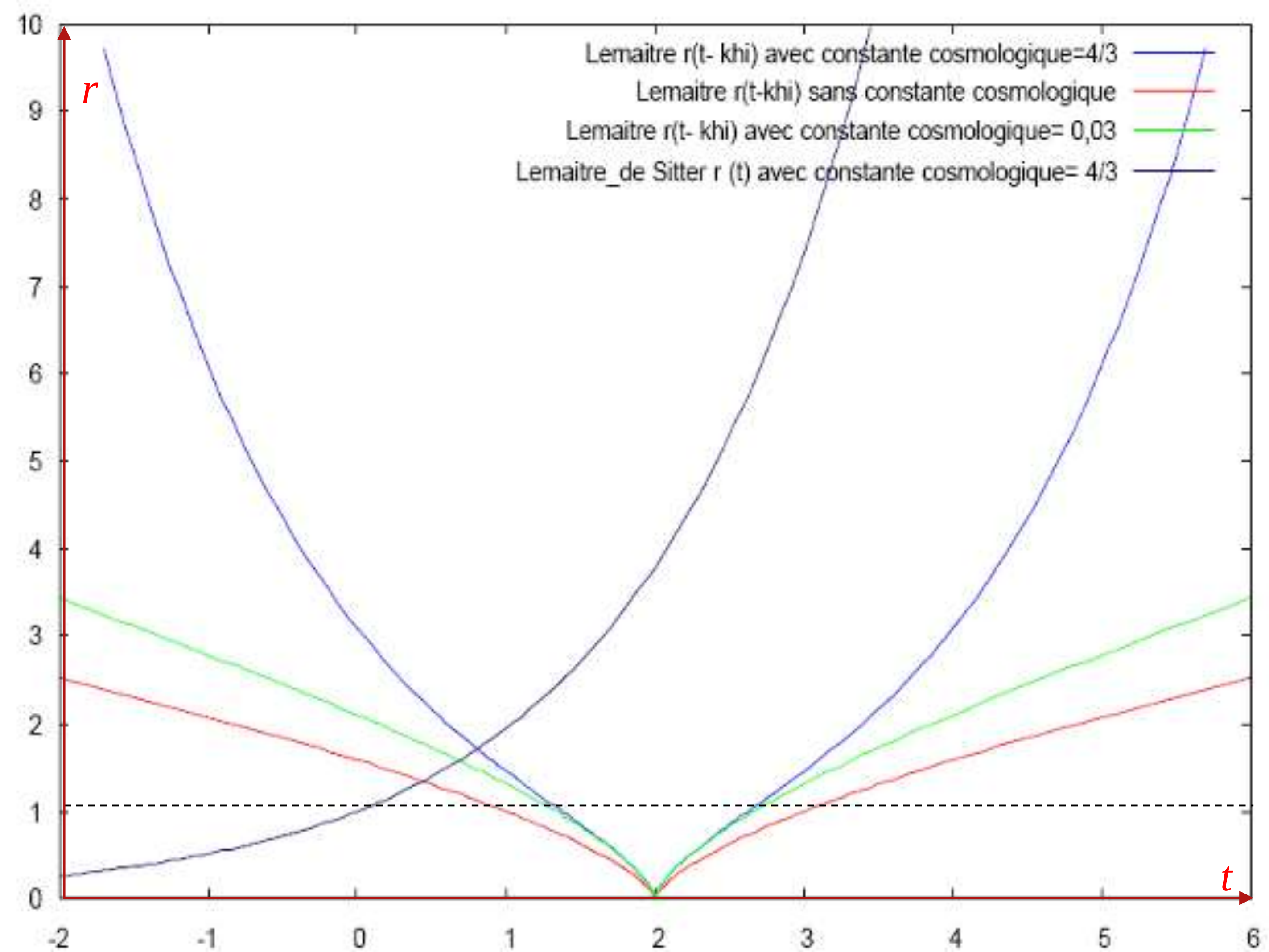
- Lemaître propose la solution :

    - $r = \pm 2r_0 Sh^{2/3}\,[(3/2)A(t-\chi)].$

- (Les courageux pourront vérifier que c'est correct)

- Comme la figure ci-dessous le visualise, cette équation décrit une région en expansion et une région en contraction.
- Lemaître avait trouvé les 4 régions du trou noir statique à symétrie sphérique, plus de 30 ans avant Kruskal, mais ceci n'a pas retenu son attention.

Équation géodésique de l'espace-temps



Courbes tracées[1] pour l'équation géodésique (14-10), avec les valeurs suivantes des paramètres: G= c =1, 2M =1, χ =2, et 3 valeurs de la constante cosmologique : λ = 4/3, λ = 0.03, λ = 0, et pour la solution de De Sitter [2] avec M =0, λ = 4/3.

Équation géodésique de l'espace-temps

- On a tracé l'horizon (ligne pointillée horizontale à $r = 1$). On voit que dans cette forme de la métrique la géodésique radiale entrante traverse l'horizon sans discontinuité, à la différence du cas des coordonnées de Schwarzschild.
- Étudions la variation de $r(t- \chi)$ lorsque t augmente.
- Prenons, par exemple, la courbe correspondant à l'équation géodesique pour $\lambda = 4/3$ (bleu clair). Lorsque t varie de $-\infty$ à $t = \chi$, on voit que $r\ (t-\chi)$ diminue jusqu'à atteindre la valeur 0.

Équation géodésique de l'espace-temps

- Ceci correspond à une contraction de l'univers au sens cosmologique, ou à une chute libre de l'observateur de Lemaître (pour $t < \chi$) vers la singularité dans la solution de Schwarzschild.
- Pour, $t > \chi$ l'univers est en expansion, l'observateur de Lemaître est expulsé.
- Comme $r = 0$ est une singularité, on ne peut pas passer continûment de la région de contraction à la région d'expansion : ce sont donc des régions infinies disjointes.

La métrique hybride de Lemaître de la solution de Schwarzschild

Conditions d'établissement de cette forme de métrique

- De cette équation du mouvement rappelons qu'on déduit : $\frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{-\partial r}{\partial t}$
- En reportant cette relation dans la métrique générique avec *f(χ)* = *1* (sections spatiales euclidiennes) et en remplaçant *∂r/∂t* par sa valeur donnée par Lemaître obtient une métrique spécifique pour la solution de Schwarzschild, sans singularité autre que celle à *r* = *0*.

$$ds^2 = -A^2(r^3 + 8r_0^3)\frac{d\chi^2}{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2 dt^2$$

- Cette forme est sensiblement différente de la forme de l'univers de Friedmann critique, malgré les liens qui les unissent au niveau de l'équation du mouvement.

Équation géodésique de l'espace-temps

- Cette forme de la métrique de Schwarzschild, établie par Lemaître, présente manifestement un caractère hybride (coordonnées t, χ, θ, φ et une fonction $r(\chi, t)$ de ces coordonnées).
- Comme nous l'avons déjà indiqué, Lemaître peut éliminer une des variables parmi t, χ et r. Comme t est le temps propre, il est judicieux de le conserver.
- Il reste deux choix à Lemaître, utiliser (t, r, θ, φ) ou $(t, \chi, \theta, \varphi)$, ce qui fait que l'équation hybride va se décliner en deux formes, toutes deux non singulières sur l'horizon.

Équation géodésique de l'espace-temps

▶ La forme de la métrique de Painlevé-Lemaître

- Le premier choix conduit à une forme non dynamique, en fait stationnaire, mais comme la distinction entre statique et stationnaire n'existait pas à l'époque, ceci interpelle l'argument de Lemaître au sujet de la relation entre la staticité et le caractère singulier à l'horizon.
- Lemaître établit directement la forme que Painlevé [1] avait proposée en 1921.

$$ds^2 = dt^2\left[1 - \frac{2M}{r} \pm \frac{\lambda r^2}{3}\right] - dr^2 \pm 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}}\, dr dt - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

- Par la transformation : $d\tau = dt + \underline{Ar[(r^3+8r_0^3)/r]^{1/2}}\, dr$,
    - $r - A^2(r^3+8r_0^3)$
- Lemaître montre l'équivalence de sa forme avec celle de Schwarzschild.

Équation géodésique de l'espace-temps

▶ *La forme de la métrique de Lemaître*

- L'autre est dynamique et entièrement nouvelle.

$$ds^2 = -2M\frac{d\chi^2}{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2$$

- L'équation géodésique avec $\lambda = 0$, en intégrant devient :
- $$r = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2M}(\chi - t)\right)^{(2/3)}$$
- Cette équation a la même forme que la solution de Friedmann plate ($r = B(t-t_0)^{2/3}$), ce qui corrobore l'analogie que nous avons développée.

Équation géodésique de l'espace-temps

- En reportant donnant la valeur de *r* en fonction de *t* et χ, on obtient :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \left(\frac{4M}{3(ct-\chi)}\right)^{(2/3)} d\chi^2 - (2M^{2/3})\left(\frac{3(ct-\chi)}{2}\right)^{(4/3)} \left(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

- Elle est appelée "forme de Lemaître", et correspond à l'équation du mouvement et c'est manifestement celle qui a ses faveurs. Nous avons restauré *c* du fait du terme $(ct - \chi)$.
- Dans cette forme, il est évident que la coordonnée temporelle *t* est bien le temps propre de l'observateur de Lemaître, à coordonnées spatiales constantes. En particulier pour l'observateur en chute libre radiale la coordonnée χ est constante.

Équation géodésique de l’espace-temps

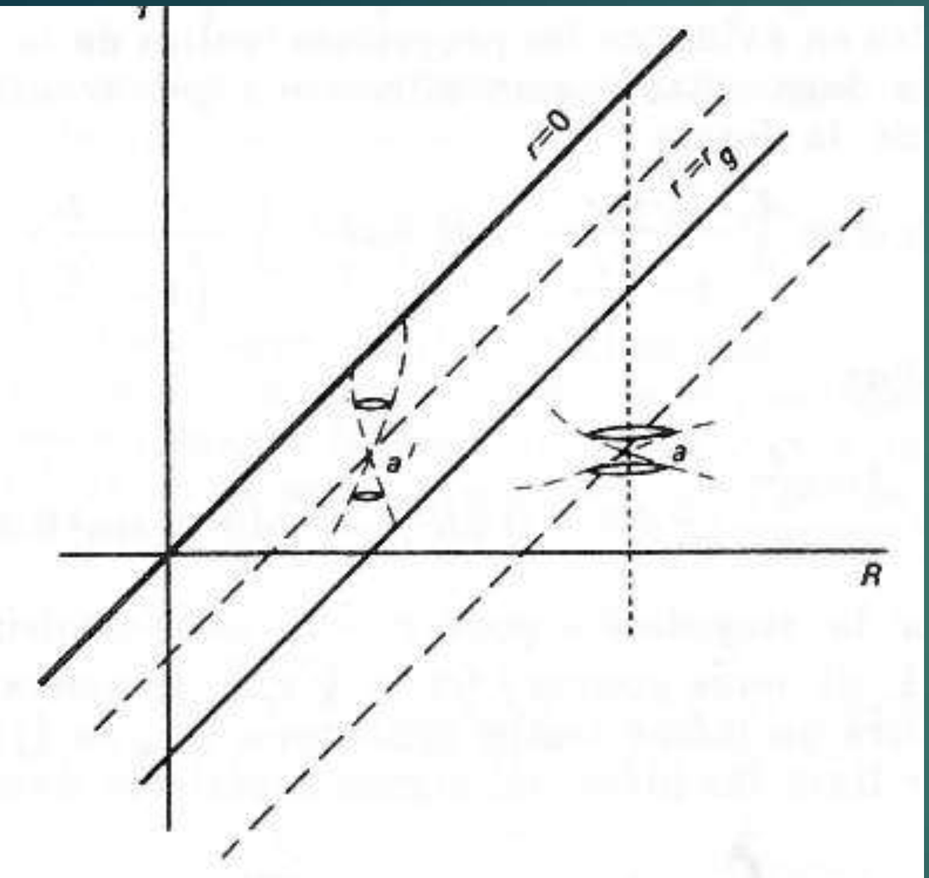


Fig. 20

Représentation graphique en coordonnées χ, t de l’équation, pour t < χ, (région en contraction), avec λ =0. La valeur du rayon de Schwarzschild est r_g.

Sur la figure, les géodésiques *r(χ –t)* suivies par un observateur de Lemaître à *χ* constant sont des droites verticales (comme en RR), ce qui souligne la pertinence de cette forme. Les coordonnées *t* et *χ* sont représentées sur des axes orthogonaux alors que comme nous l’avons signalé ce sont des coordonnées affines sur la même géodésique. Mais cette représentation permet de représenter la fonction *r(t - χ)* qui fait le lien avec les autres formes.

- Cela n’a pas été reconnu à sa juste valeur à l’époque mais il est vrai que cet article rédigé en français a été peu diffusé même si Tolmann, Synge et Kruskal y font référence dans leurs propres travaux fondamentaux et décisifs sur cette solution. Pourtant la lucidité et la rigueur avec laquelle il aborde les problèmes cosmologiques est stupéfiante. Il est vrai que, à la différence d’Einstein, il était un excellent mathématicien et la seule chose qu’on puisse regretter c’est que lui-même n’ait pas reconnu toutes les découvertes qu’il avait faites.

.

Conclusion

- On voit que Lemaître a bâti sa notoriété sur ses travaux en cosmologie et en particulier sur l'expansion de l'univers, pourtant il a aussi magistralement contribué à résoudre un problème qui était en suspend depuis que Schwarzschild avait trouvé une solution en 1916 et qui donnait bien du souci à Einstein et aux relativistes le problème de la singularité sur l'horizon d'un trou noir à symétrie sphérique.
- Si on peut se demander ce qu'un chapitre consacré aux trous noirs vient faire dans un article consacré à la cosmologie, on voit que Lemaître y expose sa conception de la solution de Schwarzschild comme une solution cosmologique et que cela relève d'une audace de pensée qui n'est reconnue comme très pertinente que depuis peu. C'est cette approche originale qui a permis à Lemaître de réussir à résoudre le problème de l'horizon dans le problème de Schwarzschild, là où les autres avaient échoué.