Les trous noirs: Les enfants indésirés de la relativité générale!

Premières solutions 1915-1921

- En 1915, Einstein bute encore sur le problème de covariance générale, il publie plusieurs versions de ses équations. Einstein a élaboré ses équations en cherchant une généralisation « relativiste » de l'équation « classique » de Poisson.
- A partir de sa conception géométrique de l'espace temps (la matière génère une courbure de l'espace temps), son équation se devait de comporter d'un côté une entité géométrique $G_{\mu\nu}$ (caractérisant une courbure) et de l'autre une entité physique (caractérisant la distribution de matière énergie), qui comme il l'avait montré en relativité restreinte est caractérisé par le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$).

- Ce qui s'écrit :

  - $$G_{\mu\nu} = K.T_{\mu\nu}$$

- $T_{\mu\nu}$ est à flux conservatif (divergence covariante nulle): $T^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0$

- Partant du principe qu'en physique, les équations différentielles ne vont pas au-delà du second ordre, il a cherché un tenseur « géométrique » dérivé du tenseur de Riemann qui caractérise la courbure possédant cette propriété qui pouvait être égalé (via une constante dimensionnée ***K***) au tenseur énergie impulsion.

- Le choix est restreint. Le tenseur de Ricci aurait pu faire l’affaire s’il avait satisfait à la condition de divergence nulle. Einstein est donc amené à construire un tenseur à partir du tenseur de Ricci $\boldsymbol{R_{\mu\nu}}$ et de sa contraction $\boldsymbol{R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}$ (le scalaire de Ricci). C’est le tenseur d’Einstein $\boldsymbol{G_{\mu\nu}}$ qui a une divergence nulle comme il est facile de le vérifier.
- Le symbole « **;** » est utilisé conformément aux usages pour désigner l’opération de dérivation covariante.
- Le tenseur d’Einstein vaut:
  - $\boldsymbol{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\ R} \qquad \boldsymbol{G_{\mu\nu;\,\nu} = 0}$

Ajoutons une condition aux limites : Dans un espace vide de matière ou du moins très loin des sources de matière on doit converger asymptotiquement vers la relativité restreinte. La forme générale de son équation étant établie, il restera à valoriser la constante dimensionnée par convergence à la limite « Newtonienne » avec la théorie classique de la gravitation.

Fort de ce résultat, à peu de temps d'intervalle, il publie fin 1915 ses équations dont la première version est restrictive, avec la condition ***g = -1***. Il publie aussi celle correspondant à la covariance générale, mais comme il n'est pas très sûr de lui, il recommande de respecter si possible la condition ***g = -1***.

- Il s’interroge sur la nature physique du champ de gravitation sur la base de la mise en œuvre du principe d’équivalence de Galilée et va conformément à cette hypothèse calculer la déviation de la lumière par le Soleil.
- A cette même époque et quelques jours avant qu’Einstein publie ses propres travaux, D. Hilbert en utilisant un principe différent (principe variationnel, utilisant action d’Hilbert) propose une équation, solution de la théorie élaborée par Einstein.

- Cela a donné lieu à une petite querelle en paternité de la RG qui s’est rapidement éteinte, Hilbert reconnaissant finalement la paternité d’Einstein. Finalement, Einstein publie une synthèse très argumentée et complète de sa théorie en 1916.
- La méthode plus générale de Hilbert est celle qui a la préférence aujourd’hui, d’autant que s’appuyant sur le principe variationnel, elle se généralise à d’autres théories.

1916 : Solution de Schwarzschild

Schwarzschild. K. (1916a) « Uber das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinchen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 189-196.

- C'est dans ce contexte, à partir de la première version des équations d'Einstein (fondée sur ***g* = -*1*)** qu'en janvier 1916, depuis le front russe où il s'est porté volontaire, Karl Schwarzschild, un des fondateurs de l'astrophysique moderne, astronome à l'observatoire de Postdam, élabore la première solution exacte aux équations d'Einstein dans le vide, celle relative au champ gravitationnel généré par une masse unique à symétrie sphérique (à l'extérieur de la masse).

.

1916 : Solution de Schwarzschild

Schwarzschild. K. (1916a) « Uber das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinchen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 189-196.

- Schwarzschild est parti de la publication restrictive d'Einstein. Du fait de cette contrainte, les coordonnées sphériques, pourtant naturelles dans un problème manifestement à symétrie spatiale sphérique, sont difficiles à utiliser (elles ne satisfont pas à la condition de déterminant ***1*** pour la partie spatiale).

.

1916 : Solution de Schwarzschild

- A partir des coordonnées polaires ***(R, θ, φ)***, dont l'origine est le centre de symétrie de la masse unique, Schwarzschild est amené à fabriquer des coordonnées spatiales déterminant ***1***. Il introduit une coordonnée radiale auxiliaire ***r*** définie par :
- $r = (R^3 + r_s{}^3)^{1/3}$ avec $c = G = 1$, $r_s = 2M$, r_s est le rayon de Schwarzschild.
- pour établir la forme de la métrique qui s'écrit alors
- $ds^2 = (1 - r_s/r)dt^2 - dr^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)$
- *On supposera que **c =1, G =1**, par défaut lorsque **c ,G** ne sont pas spécifiés explicitement dans tout le texte.*
- En fait $r_s = 2GM/c^2$ mais est noté ***2M*** avec ***c =1, G =1***. On utilisera également la notation r_s tout au long du document

1916 : Solution de Schwarzschild

- Cette solution décrit un espace temps statique, à l'extérieur de l'horizon (et aussi à l'extérieur de la masse générant le champ, car rappelons le, elle est définie dans le vide) dont la partie spatiale est à symétrie sphérique.
- Elle est définie à l'extérieur de l'horizon, car dans ces coordonnées la valeur minimum de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R = 0}$, donne $\boldsymbol{r = r_s}$, ce qui correspond à la sphère qui représente géométriquement l'horizon.
- Lorsqu'on parle de la singularité de Schwarzschild, on anticipe un peu puisque la solution dont la métrique porte son nom a été établie en fait par Droste comme nous allons le voir. Mais comme Schwarzschild avait ouvert la voie, on lui a donc attribué (à titre posthume) cette paternité.

.

1916 : Singularité de Schwarzschild

- La relativité générale est une théorie géométrique (non euclidienne) à quatre dimensions (trois d’espace et une de temps) de la gravitation.
- Dans cette théorie les mouvements des corps sont les géodésiques (courbes) de cette géométrie.
- Le calcul des paramètres de ces courbes géodésiques, par exemple le temps de parcours d’un observateur entre deux points d’une trajectoire nécessite un objet caractéristique de la géométrie, appelé tenseur métrique et noté en général ds^2.

1916 : Singularité de Schwarzschild

- Pour les calculs il est pratique d’utiliser les outils de la géométrie analytique, ce qui conduit à définir ce tenseur métrique dans des coordonnées (arbitraires).

- Si le résultat du calcul du mouvement des corps ne dépend pas des coordonnées utilisées, certaines vont révéler plus clairement la structure de l’espace-temps.

1916 : Singularité de Schwarzschild

- L'équation : $ds^2 = (1 - r_s/r)dt^2 - dr^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)$

- est la « métrique » dite de « Schwarzschild », qui décrit la solution de l'espace-temps (extérieur) généré par un corps unique à symétrie sphérique, dans certaines coordonnées. Ceci est une modélisation approximative du système solaire.
- On voit que le deuxième terme du membre de droite devient infini si $r = r_s$. Comme aucune grandeur physique ne saurait être infinie, ceci est ce qu'on appelle *une singularité* (la physique est impuissante à la décrire).

1916 : Singularité de Schwarzschild

- La forme de métrique décrivant le même espace-temps mais dans d’autres coordonnées, proposée par Painlevé, qui est orientée (caractère conceptuel), n’aura pas ce défaut : ce qui montre que cette singularité n’est pas physique et est liée à une contrainte (la non-orientation du temps) qu’on s’est indûment imposée.

1916 : Singularité de Schwarzschild

- ***Karl Schwarzshild (1873-1916), astrophysicien allemand.*** *Lieutenant d'artillerie sur le front russe, il prend connaissance de la théorie de la relativité générale d'Einstein en novembre 1915. Einstein présente les résultats de Schwarzschild à l'Académie des sciences de Prusse le 13 janvier 1916. Quelques mois plus tard en juin, Schwarzschild meurt à Potsdam des suites d'une maladie contractée au front.*

1916 : Solution de Schwarzschild

- Dans un deuxième article Schwarzschild publiera une solution « intérieure » en utilisant l'équation hydrostatique pour une boule de fluide à densité constante dont la pression s'annule sur la surface.
- Dans ce modèle la pression au centre devient infinie dès que le rayon devient inférieur à une valeur limite $R_{lim} > \boldsymbol{r_s}$. Il en déduit (à tort) que des corps de rayon $\boldsymbol{r}$ et de masse $\boldsymbol{M}$, tels que $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{2GM/c^2}$ ne peuvent exister, donc que la région $r \leq \boldsymbol{r_s}$ est non physique Schwarzschild (1916 b).
- A l'intérieur de la matière, par opposition à la solution « dans le vide » (à l'extérieur de la masse générant le champ). Solution obtenue toujours avec la condition de déterminant 1.

1916- Solution de Droste :

Droste .J. (1916) « Het van eenenkel centrumin Einstein's theorie des zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punkt in dat veld. Versl. Gewone Vergad Akad.Amst.25,163-180. English translation : the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Proc.Acad.Sci. Amst.,19(i):197-215.

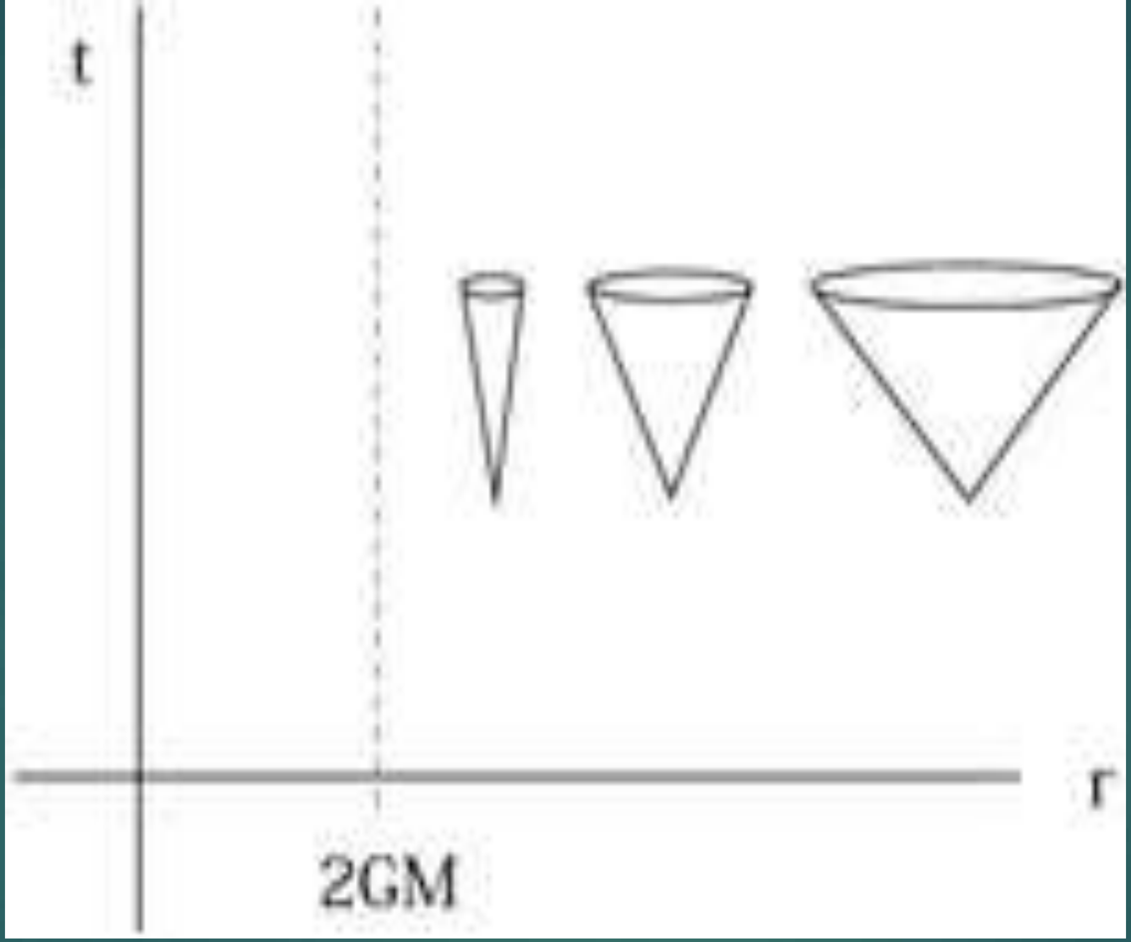
- Droste élève de Lorentz, généralise la solution de Schwarzschild, dans le cadre des équations d'Einstein dans le contexte de la covariance générale (sans cette restriction de déterminant qui a contraint Schwarzschild à quelques acrobaties), qui généralise la solution de Schwarzschild, en l'étendant jusqu'au point $\boldsymbol{r = 0}$ (centre de symétrie) en coordonnées sphériques. C'est la forme actuelle de la solution de Schwarzschild.
  - $ds^2 = (1 - r_s/r)dt^2 - dr^2/(1 - r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)$

.

1916- Solution de Droste :

- Cette forme met en évidence deux singularités de coordonnées à $r = \boldsymbol{r_s}$ et $r = 0$.
- La discussion portera longtemps sur la nature de ces singularités. Cette forme décrit la métrique (le ds^2) de l’espace temps pour $\boldsymbol{0 < r < \infty}$.
- Mais notons qu’il faut plusieurs référentiels pour décrire cet espace temps.
- En effet il faut un premier référentiel pour décrire la région $\boldsymbol{r > r_s}$ et un deuxième pour décrire $0 < r \leq \boldsymbol{r_s}$, comme la fermeture des cônes de lumière à l’approche de $\boldsymbol{r = r_s}$ et la discontinuité de la représentation des géodésiques radiales le montre.

1916- Solution de Droste :



Allure des cônes de lumière sur une géodésique radiale, définis par $dr/dt = \pm (1-r_s/r)$, à partir de:
$ds^2 = (1- r_s/r)dt^2 - dr^2/(1- r_s/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)$ avec $ds^2 = 0$, θ , φ constants et avec $c = 1$.

1916- Solution de Droste :

- C’est un problème assez classique lié aux coordonnées pour baliser une variété. On peut rarement étiqueter la variété avec un seul système de coordonnées.
- Cette forme est la solution unique des équations de la relativité générale qui représente l’espace temps extérieur vide généré par un corps « central » à symétrie sphérique, quelle que soit sa taille et sa masse (un trou noir, une étoile), qu’il soit statique ou non, du moment qu’il reste à symétrie sphérique (Théorème de Birkoff).
- Il est étonnant de constater que le caractère statique demeure même si le corps central ne l’est pas On verra dans la suite que c’est pourtant possible dans ce cas.

Premières solutions non singulières sur l'horizon (1921-1923)

- Les trous noirs sont un sujet maudit, dont il n'est pas convenable de parler.
- Tous les scientifiques faisant autorité s'accordent à penser que cette conception de la solution présentant des singularités qui nuisent gravement à l'intégrité et la crédibilité de la théorie est une aberration de la nature et ne saurait physiquement exister.
- Le sujet est même tourné en dérision et ceux qui s'y intéressent feraient mieux de faire de la physique plutôt que de spéculer sur une curiosité mathématique. Pourtant, certains irréductibles continuent à ne pas partager ce point de vue.

1921- Coordonnées de Painlevé

Painlevé P.(1921) La mécanique classique de la théorie de la relativité. C.R Acad. Sci Paris 173, 677-680, A.

- Paul Painlevé, plus connu en tant qu'homme politique, (il a été chef du gouvernement pendant le premier conflit mondial), que scientifique, mais qui avait étudié l'œuvre d'Einstein, propose en 1921 une forme qui s'écrit:
  - $ds^2 = (1- r_s/r)dT^2 - 2(r_s/r)^{1/2}\, dr.dT – [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)]$ (2-1-1)
- On voit qu'elles effacent la singularité à $r = r_s$.
- Ces coordonnées correspondent à un observateur en chute libre radiale de l'infini vers $r = 0$, avec comme condition à la limite une vitesse nulle à l'infini.
- Ce qui signifie que, à l'infini, l'énergie e de la particule en chute libre radiale (géodésique) est égale à son énergie de masse. On utilise en fait l'énergie par unité de masse $E = e/m$. Si la vitesse n'est pas nulle, cela va définir une famille de formes à un paramètre..

1921- Coordonnées de Painlevé

- Bien que Painlevé les ait posés à priori comme nouvelle solution, on peut les dériver de la forme de Schwarzschild en considérant l'équation géodésique radiale dans ces coordonnées. Cette équation détermine ***t'***et ***r'*** (dérivées par rapport au temps propre de l'observateur).
- A partir de la quadri vitesse contravariante $u^\mu = (t', r', 0, 0)$ on peut calculer la quadri vitesse covariante $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$ et la considérer comme le gradient d'une fonction ***T*** soit : $u_\mu = \partial_\mu T$.
- En intégrant on obtient la fonction ***T*** suivante :

- $T = t + 2\, r_s[(r/r_s)^{1/2} + ½ \ln|(r/r_s -1)/r/r_s +1)|$ **(2-1-2)**

1921- Coordonnées de Painlevé

- C’est le changement de coordonnées qu’il faut effectuer pour trouver la forme ***(2-1-1)***
- Elles sont historiquement les premières coordonnées à décrire dans un même système de coordonnées l’extérieur et l’intérieur du trou noir, ce qui est assez méconnu.
- Il est étonnant qu’elles ne soient pas plus souvent citées, d’autant que ce type de coordonnées (chute libre) est souvent très intéressant à utiliser et qu’on redécouvre aujourd’hui tout l’intérêt qu’elles présentent.

1921- Coordonnées de Painlevé

- Remarquons qu'elles décrivent une géodésique radiale entrante, mais que la forme symétrique par renversement du temps (ce qui change le signe du terme en ***dr.dT***) décrit une géodésique radiale sortante (cette possibilité n'ayant pas été exploitée par Painlevé, à l'époque).
- Elles permettraient d'accéder dans ces conditions aux quatre régions qui seront décrites ultérieurement par la forme de Kruskal.

1921- Coordonnées de Painlevé

- Une des raisons possibles de son impopularité résulte peut-être des débats entre Painlevé et Einstein, qui montraient clairement que Painlevé n'avait pas compris certains aspects fondamentaux de la théorie de la Relativité, en particulier le rôle conventionnel des coordonnées, puisqu'il soutenait que cette métrique était une autre solution (différente) au problème du corps central. Il semble qu'il accordait un sens physique intrinsèque aux coordonnées et il tirait de sa forme de la métrique certaines conclusions hâtives et fausses (il niait le décalage spectral dans un champ de gravitation et plus étonnant l'objectivité du ds^2). Einstein lui a fait remarquer qu'en remplaçant la coordonnée r par une fonction de r on n'obtient pas une nouvelle solution, mais que c'est la même exprimée autrement.

1922- Coordonnées de Gullstrand

Gullstrand A.(1922). Allgemeine Lösung des statischen Einkörper-problems in der Einsteinchen Gravitations theorie, Arkiv.Mat.Astron.Fys. 16(8), 1-15

- En 1922, Gullstrand propose le même type de coordonnées.
- On a peu de détails sur ce qui l'a amené à travailler sur le sujet, car Gullstrand avait obtenu le prix Nobel de médecine pour ses travaux sur l'œil, spécialité qui semble assez éloignée de la relativité générale.
- Cela montre qu'à cette époque une polyvalence scientifique était de mise.

1923- Coordonnées d’Eddington

Eddington A.S 1923. The mathematical theory of gravitation. Cambridge Un. Press 1923, 336p

- La forme s’écrit :
-
- $ds^2 = -(1-r_s/r)dv^2 + dv.dr + dr.dv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)$

- A l’époque, l’horizon, la « boule de Schwarzschild » était considéré comme « impénétrable ». De plus il était malséant de parler de ces « erreurs de la nature » qu’on appelait trou noir. Eddington en particulier en était un des détracteurs les plus virulents. Se demander s’il était possible de traverser l’horizon à cette époque, autrement dit, se demander si l’espace temps sous l’horizon avait un caractère physique, faisait partie des problèmes qu’on ne se posait pas.

1923- Coordonnées d'Eddington

- D'ailleurs, avec les coordonnées de « Schwarzschild » cela semblait impossible de décrire des trajectoires qui traversaient l'horizon puisque cela prenait un temps infini pour l'atteindre.
- Eddington a été dans les premiers à proposer des coordonnées de ce type qui étaient non singulières à $r = \boldsymbol{r_s}$ et qui permettaient donc une description des trajectoires et géodésiques traversant cet horizon et allant jusqu'à la singularité centrale.
- Lui aussi n'a pas eu conscience de l'importance de cette découverte, convaincu sans doute comme il l'était de l'inexistence des trous noirs.

1923- Coordonnées d'Eddington

- Il se plaisait à déclarer « Il doit y avoir dans la nature des lois qui doivent empêcher cela ».
- La forme de Painlevé propose des coordonnées « chute libre », ces deux formes font partie d'une même famille à un paramètre (voir coordonnées de Finkelstein), mais cela n'était pas reconnu à l'époque..

1921- 1923: Une période riche en débats

- Après un début difficile, lié au fait qu'à sa publication fin 1915, on était au milieu de la première guerre mondiale et Einstein à Berlin, 1921-1922 va constituer un sommet dans le bouillonnement des idées au sujet de cette nouvelle théorie du corps unique à symétrie sphérique, très mal comprise, même d'Einstein, au moins sur certains points critiques.

1921- 1923: Une période riche en débats

- Occultée par le développement de la mécanique quantique, cet engouement va rapidement s'estomper vers 1924 pour laisser place à une période de léthargie, même si la cosmologie relativiste commence à émerger avec les contributions d'Einstein, de Friedmann et de Lemaître qui curieusement proposera une approche synthétique en considérant la solution de Schwarzschild comme une solution cosmologique.
- Mais, nous verrons qu'il faudra attendre les années 60 pour qu'on ait une meilleure compréhension de cette solution.