Table des matières

Pourquoi des tenseurs en RG ?

Einstein fait observer qu'un phénomène physique est intrinsèque. Que la mesure des paramètres de ce phénomène par des observateurs différents donne des valeurs différentes est circonstanciel. Le principe* de Relativité Générale stipule que les lois de la physique peuvent être décrites dans n'importe quel référentiel (inertiel ou non).
Si on a écrit ces lois dans un référentiel, pour les transposer dans un autre référentiel, il faut opérer la transformation de « coordonnées » correspondant au passage de l'ancien système de coordonnées vers le nouveau.
L'objectif recherché est de trouver une formulation des lois qui fasse que par n'importe quelle transformation de coordonnées (locale, car les lois de la RG s'expriment par des équations différentielles locales, en vertu du principe d'équivalence), la <u>forme des lois</u> soit conservée : **Si une relation entre des paramètres existe dans un référentiel, la même relation entre les valeurs (différentes) de ces mêmes paramètres existe dans les autres**. **Il se trouve que pour les transformations considérées les tenseurs possèdent précisément de cette propriété**.
Autrement dit : Si j'arrive à écrire une loi en RG sous forme de relation entre tenseurs, si elle est vraie dans un système de coordonnées (un référentiel quelconque), alors elle est vraie dans tous ! On dit alors que ces équations sont « généralement covariantes »

Notion de tenseur : Construction de l'objet géométrique « tenseur »
Espace vectoriel E^n

Un espace vectoriel est un ensemble d'objets (vecteurs) V, qui peuvent être comparés, additionnés (muni d'une structure de groupe) et multipliés par des nombres réels (corps) de façon linéaire. Soit V et W deux vecteurs de cet ensemble et a et b deux nombres réels:

$$(a+b).(V+W) = a.V + b.V + a.W + b.W. \quad (1)$$

Le nombre de vecteurs linéairement indépendants *(n)* définit la dimension de l'espace Vectoriel. Les vecteurs définis dans cet espace vectoriel sont dits « contravariants »
Un jeu de n vecteurs linéairement indépendant définit une base ($\hat{e}_0, \dots\hat{e}_\mu, \dots\hat{e}_n$). On définit par V^μ les « composantes » d'un vecteur V, conformément à (1), par :

$$V = \Sigma_{\mu=1 \text{ à } n} (V^\mu .\ \hat{e}_\mu) = V^0.\ \hat{e}_0 + V^1.\ \hat{e}_1 + \dots + V^n.\ \hat{e}_n = V^\mu.\ \hat{e}_\mu \text{ (Convention d'Einstein)} \quad (2)$$

Pour simplifier la notation, on ne fait référence en général, qu'aux composantes[1] des vecteurs (la base est sous entendue)

1 Nous sommes tellement habitués à l'isomorphisme entre notre espace physique et R^3, qu'on en oublie combien cette idée d'associer à chaque point de l'espace des coordonnées et de transformer un problème de géométrie en un problème de calcul sur R^3 a été une percée non triviale. Notons également qu'une variété n'est pas un espace vectoriel, la comparaison, addition/soustraction de vecteurs posant problème!

Soit un vecteur V de cet espace vectoriel (qu'on appelle vecteur contravariant en abrégé ou vecteur tangent, ou tout simplement « vecteur ») de composantes contravariantes V^μ dans un système de coordonnées local $C1(x^\mu)$.
Evaluons les composantes $V^{\mu'}$ de ce même vecteur V, dans un autre système de coordonnées $C2\ (x'^\mu)$ au même point, alors la loi de transformation la plus générale (valable dans n'importe quel espace) est :

$$V^{\mu'} = (\partial x'^\mu / \partial x^\mu) \,.\, V^\mu \qquad (3)$$

Il suffit de remarquer que c'est le même vecteur qui est décrit dans les 2 bases, et évaluer les vecteurs ($\hat{e}_\mu$) de la base d'origine dans la seconde $(\hat{e}_{\mu'})$ et de substituer.

$$V = V^\mu .\, \hat{e}_\mu = V^{\mu'} .\, \hat{e}_{\mu'} \qquad (4)$$

Avec

$$\hat{e}_\mu = (\partial x'^\mu / \partial x^\mu)\, \hat{e}_{\mu'} \qquad (5)$$

On les appelle « contravariants » du fait que la loi de transformation des composantes est l'inverse de la loi de transformation des vecteurs de base.

Espace vectoriel dual E_n

Sur l'espace vectoriel $\boldsymbol{E^n}$ défini précédemment on peut définir une forme linéaire F (vecteur dual ou vecteur à composantes covariantes, vecteur covariant en abrégé, ou vecteur cotangent), telle que si on a deux vecteurs (contravariants) V, W et deux nombres réels $a,b,$ on a :

$$F\,(aV + bW) = aFV + bFW = R \quad (R \text{ est un nombre réel}) \qquad (6)$$

Une forme linéaire appliquée sur un vecteur produit un nombre. Comme:

$$V = V^{\mu}.\,\hat{e}_{\mu} \quad \rightarrow \quad F.V = V^{\mu}.F\,(\hat{e}_{\mu}) \qquad (7)$$

On voit que $F(\hat{e}_{\mu})$ est la composante F_{μ}, correspondante à $\hat{e}_{\mu}$, de la forme linéaire. En pratique, on peut s'arrêter là.

Exemple pratique:

Trouver la forme $\boldsymbol{F}$ qui aux vecteurs $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, $\mathbf{V_3}$ de composantes respectives (4, 2, 0), (1, 2, -3), (0, 2, 5) dans la base $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ de R^3 associe respectivement les scalaires (2,-7,-1): Appliquons (6)

$$\begin{aligned}
4.\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_1) + 2\,.\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_2) \quad &= 2 \\
1.\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_1) + 2.\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_2) - 3\,\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_3) \quad &= -7 \\
2.\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_2) + 5.\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_3) \quad &= -1
\end{aligned}$$

On trouve: $\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_1) = 2$, $\boldsymbol{F}(\hat{\mathbf{e}}_2) = -3$, $\boldsymbol{F}(\hat{e}_3) = 1$, $\boldsymbol{F}$ a pour composantes (2, -3, 1) dans la base duale ω^{μ}.

Pour être formel, on va introduire des vecteurs de base de cet espace dual:

Définissons ω^{ν} comme une base de cet espace dual par : $\omega^{\nu}.\hat{e}_{\mu} = \delta_{\mu}{}^{\nu}$
$\delta_{\mu}{}^{\nu}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $\mu = \nu$ et 0 autrement

F s'écrit alors $F_{\nu}\,\omega^{\nu}$ où (7) s'écrit $F.V = V^{\mu} F_{\nu}.\omega^{\nu}.\hat{e}_{\mu} = V^{\mu} F_{\nu}.\delta_{\mu}{}^{\nu}$ (8)

Ces formes linéaires forment un ensemble muni d'une structure d'espace vectoriel de même dimension n noté « $\boldsymbol{E_n}$ » (satisfont aux axiomes d'espace vectoriel)

Sans refaire tous les calculs on montrerait (exercice) que pour un vecteur « covariant » (noté maintenant V_{μ} pour homogénéiser la notation), la loi de transformation est :

$$\boldsymbol{V_{\mu}' = (\partial x^{\mu} / \partial x'^{\mu}) . V_{\mu}}$$

On a : $\boldsymbol{V^{\mu} . V_{\mu} = Scalaire}$ (Invariant par transformation de coordonnées) (9)
A noter que le dual du dual est l'espace d'origine.

Nous avons maintenant les briques de bases pour introduire les tenseurs

Notion de tenseur

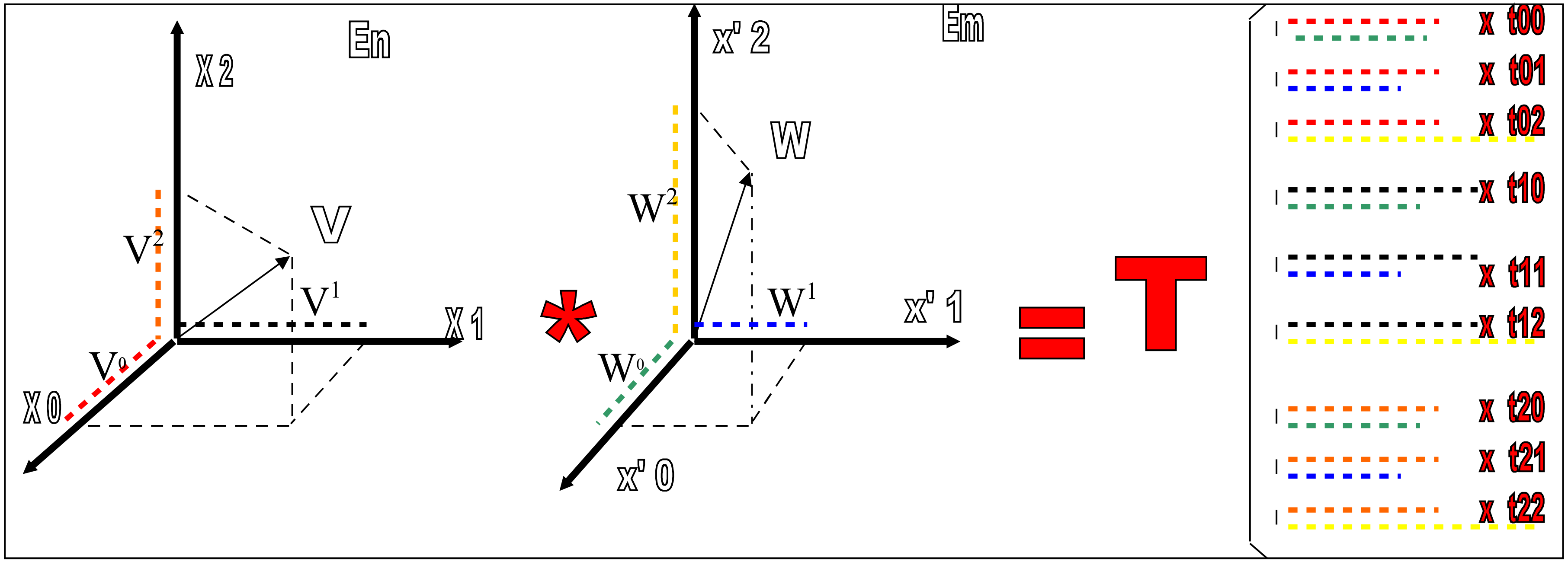
Tenseur contravariant

Produit tensoriel : Soit deux espaces vectoriels E^n à n dimensions et E^m à *m* dimensions

Posons $m = n$, ce n'est pas obligatoire, mais en RG c'est généralement le cas avec n= 4.

Soit un vecteur (contravariant) $V = V^\mu . \hat{e}_\mu$, appartenant à E^n

Soit un vecteur (contravariant) $W = W^\nu . \hat{e}_\nu$, appartenant à E^m



$T^{\mu\nu} = V^\mu * W^\nu \rightarrow T^{00} = V^0 * W^0,\ T^{01} = V^0 * W^1, \ldots\ T^{22} = V^2 * W^2.$

On définit le tenseur (deux fois contravariant) T tel que $T = V * W$ (l'opérateur « * » dénote le produit tensoriel) de sorte que les composantes $T^{\mu\nu} = V^{\mu} * W^{\nu}$ de ce tenseur sont tous les produits croisés des composantes des vecteurs ($n.m$ composantes)
La « base » de ce tenseur est le produit tensoriel des vecteurs de base $\hat{e}_{\nu} * \hat{e}_{\mu}$ ($n.m$).

T est un objet de l'espace Tensoriel $\boldsymbol{E^n * E^m}$, produit tensoriel des espaces vectoriels.

Représentation pratique

Un <u>tenseur deux fois contravariant (μ,ν), à 4 dimensions</u> pour chaque indice (μ et ν varient indépendamment de 0 à 3), est un objet mathématique à 16 composantes qui peut être visualisé par exemple sous forme d'un tableau 4x4.

$$\mathbf{T^{\mu\nu}} = \begin{vmatrix} \mathbf{T^{00}} & \mathbf{T^{01}} & \mathbf{T^{02}} & \mathbf{T^{03}} \\ \mathbf{T^{10}} & \mathbf{T^{11}} & \mathbf{T^{12}} & \mathbf{T^{13}} \\ \mathbf{T^{20}} & \mathbf{T^{21}} & \mathbf{T^{22}} & \mathbf{T^{23}} \\ \mathbf{T^{30}} & \mathbf{T^{31}} & \mathbf{T^{32}} & \mathbf{T^{33}} \end{vmatrix} = \mathbf{V^{\mu} * W^{\nu}}$$

$V^0 * W^0 = T^{00}$, $V^0 * W^1 = T^{01}$, …., $V^3 * W^3 = T^{33}$

Cette construction peut évidemment être généralisée à un nombre quelconque de produits tensoriels d'espaces vectoriels et d'espaces vectoriels duals. On va définir un tenseur p fois contravariant et q fois covariant par sa variance (p,q) et la dimension (n) de l'espace vectoriel de chacun des indices. En RG cette dimension est quatre pour tous les indices.

Tenseurs covariants :

En faisant le produit tensoriel de *n* espaces vectoriels de formes linéaires on obtient des tenseurs *n* fois covariant: Exemple pour *n =2*.

Tenseur covariant (antisymétrique) de l'électromagnétisme.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu} \ .$$

Ce tenseur regroupe en une seule entité les champs électriques et magnétiques décrits en mécanique classique, permettant une écriture synthétique des lois de Maxwell[2]: Chaque composante $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu$- $\partial_\mu A_\nu$ dérive d'un quadri-vecteur potentiel A_μ, ce qui rend évidente l'invariance de jauge par la substitution $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu F$

2 En termes de composantes, elles se réduisent à $\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu$. et $\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$. **J** est le vecteur courant où $J^0 = \rho$ est la densité de charge et J^i (i = 1, 2, 3) les composantes spatiales du courant électrique. Les crochets dans la deuxième équation notent l'anti-symétrisation.

Lois de transformation

A noter, que dans notre première approche « mathématique », nous avons « construit l'objet géométrique » tenseur, qui jouit par construction de certaines propriétés, nous allons en physique, souvent oublier cette construction pour ne nous intéresser qu'aux propriétés de transformations vis à vis des transformations de coordonnées.

On voit que par construction la loi de transformation des tenseurs, pour un tenseur deux fois contravariant, va être le produit de celles des vecteurs (contravariants).

$$T^{\mu'\nu'} = (\partial x^{\mu'}/\partial x^{\mu})\,(\partial x^{\nu'}/\partial x^{\nu})\,T^{\mu\nu} \qquad (10)$$

Pour un tenseur deux fois covariants la loi de transformation va être le produit des lois de transformation des vecteurs covariants:

$$T_{\mu'\nu'} = (\partial x^{\mu}/\partial x^{\mu'})\,(\partial x^{\nu}/\partial x^{\nu'})\,T_{\mu\nu} \qquad (10\text{ bis})$$

Et pour un tenseur mixte la loi va suivre celle des vecteurs, contravariants et covariants pour les indices correspondants constituant, ce tenseur.

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\ .$$

Scalaires (Les scalaires sont des tenseurs !)

Ce sera notre premier tenseur, le plus simple, mais pas le moins important, il est de variance *(0,0)*
En établissant l'expression de l'intervalle ds^2, dans un référentiel arbitraire $\{X_i\}$, on a implicitement postulé l'invariance de la valeur numérique du ds^2, lors d'un changement de référentiel (x'_μ au lieu de x_μ).

De façon générale on appelle scalaire tout champ $S(x)$ tel que dans un changement arbitraire de référentiel produisant $S'(x')$ on ait : $S(x) = S'(x')$.

On peut facilement construire des scalaires (invariants) en « combinant* » par exemple un vecteur** contravariant et un vecteur** covariant.

- * En fait c'est le produit scalaire « généralisé » en Relativité.
- ** Les vecteurs sont des tenseurs comme on va le voir.

Les Vecteurs (les vecteurs sont des tenseurs)
Quadrivecteur contravariant : tenseur de variance (*1, 0*)

On suppose maintenant connu la notion de vecteur défini dans un espace vectoriel, ensemble dont les éléments sont les vecteurs muni d'une relation d'égalité, d'une loi interne d'addition commutative, associative munie d'un élément neutre et d'un inverse et d'une loi externe de multiplication par R, corps de réels (distributive,...).

Rappelonqs que le qualificatif contravariant vient de ce que, lors d'un changement de base les coordonnées (x^μ) varient selon la transformation inverse de celle des vecteurs de la base $(\hat{e}_\mu)$.

Exemples

Vecteur quadri vitesse $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ avec $d\tau$ invariant car : $d\tau = ds^2/c^2$.
Vecteur quadri énergie-impulsion: $p^\mu = m.U^\mu$
qui par « produit scalaire » $p^\mu p_\mu = m^2c^2$

va produire le scalaire $m^2.c^2$ (invariant en RR) indiquant l'invariance de la masse relativiste (la masse est un invariant en RR).

Autre définition d'un tenseur contravariant

On peut le définir par ses propriétés vis à vis des transformations): Tout objet défini par rapport au système de coordonnées (base d'un espace vectoriel de dimension 4 dans ce cas) par 4 grandeurs A^μ et qui se transforme selon la loi:

$$A'^\mu = (\partial x'^\mu / \partial x^\nu).A^\nu \qquad (11)$$

est aussi appelé quadrivecteur (tenseur de variance 1,0) contravariant

Quadrivecteur covariant

Un ensemble de 4 grandeurs A_μ est appelé quadrivecteur covariant si pour n'importe quel choix de vecteurs contravariants B^μ on a : $A_\mu B^\mu = invariant$ (par changement de coordonnées), c.a.d produit un scalaire, on en déduit la relation**:**

$$A'_\mu = (\partial x^\nu / \partial x'^\mu).A_\nu$$

Rappelons la dualité entre l'espace vectoriel des vecteurs contravariants et covariants (si l'un est un espace vectoriel de référence, l'autre est l'espace vectoriel, dual, des formes linéaires sur ce premier et vice versa, le dual du dual est l'original).

Tenseur contravariant (enfonçons le clou !)

Exemple tenseur de rang 2 : Notion de tenseur (produit tensoriel).

On forme les 16 produits $T^{\mu\nu}$ des composantes A^{μ} et B^{ν} de 2 quadrivecteurs contravariants:

$$T^{\mu\nu} = A^{\mu} * B^{\nu}$$

On appelle cette opération "produit tensoriel", les 16 composantes ainsi produites sont les composantes du tenseur $T^{\mu\nu}$, à noter que le tenseur résultant a ses composantes μ dans l'espace vectoriel associé au vecteur A^{μ} et ses composantes ν dans l'espace vectoriel associé au vecteur B^{ν}

Des propriétés des vecteurs on déduit: $T^{\mu\nu}=(\partial x^{\mu}/\partial x^{\lambda})(\partial x^{\nu}/\partial x^{\rho}).T^{\lambda\rho}$

Par extension, on appelle tenseur contravariant de rang 2 tout objet de composantes $T^{\mu\nu}$ qui satisfait la relation ci dessus

<u>Cette propriété caractérise un tenseur contravariant</u>

Tenseur covariant

De même, on appelle tenseur covariant d'ordre 2 un objet de composantes $A_{\mu\nu}$ qui satisfait la relation

$$A_{\rho\lambda}=(\partial x^{\mu}/\partial x^{\rho})(\partial x^{\nu}/\partial x^{\lambda})A_{\mu\nu}$$

<u>Cette propriété caractérise un tenseur covariant</u>

Le produit d'un tenseur contravariant (ou de n vecteurs contravariants) par un tenseur covariant de même rang et dimension produit un scalaire , c'est à dire quelque chose d'invariant par rapport aux coordonnées.

Tenseur mixte et de rang supérieur à 2

C'est le tenseur de plus général qui possède des composantes contravariantes et covariantes dont les tenseurs présentés précédemment ne sont de des cas particuliers.

La loi à laquelle il obéit est évidente (extension et combinaison des lois précédentes)

Une autre présentation rigoureusement équivalente et plus "intuitive" est la suivante

Un tenseur $T^j{}_k$, noté de variance (j,k), j fois contravariant et k fois covariant prend en entrée j vecteurs covariants et k vecteurs contravariants et génère un nombre.
Ce nombre en sortie est une fonction linéaire des entrées.

Une autre manière est de dire qu'il prend en entrée k vecteurs contravariants et produit en sortie j vecteurs contravariants, ce qui est équivalent car si on rajoute en entrée les j vecteurs covariants ils "mangent "les j vecteurs contravariants pour produire un nombre!![3]

---

3 Ainsi considéré le tenseur est un opérateur. Ainsi, un vecteur est considéré comme un opérateur (opérateur dérivée d'une fonction). Cette approche est classique en physique (cf MQ où aux grandeurs physiques quantité de mouvement, énergie on associe les opérateurs dérivée spatiale, dérivée temporelle).

Quelques opérations utiles sur les tenseurs

On peut additionner (soustraire) des combinaisons linéaires de deux tenseurs de même variance de même dimension d'indice. On obtient un tenseur de même variance, dont chaque composante est la somme (soustraction) des composantes correspondantes.

On peut multiplier des tenseurs par un scalaire. Chaque composante est multipliée par le scalaire)

Multiplier de façon externe deux tenseurs: $\boldsymbol{T_{\mu\nu\lambda} = A_{\mu\nu}.B_\lambda}$ par exemple (on multiplie deux à deux toutes les composantes du premier par toutes celles du second)
La variance est la somme des variances.
Contracter les tenseurs (sommer indice haut sur indice bas) Contraction de $R^\rho{}_{\mu\lambda\nu}$
On fait $\lambda=\rho$ et on somme $R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu}$
Elever /abaisser les indices à l'aide respectivement du tenseur métrique inverse ou du tenseur métrique.
$\boldsymbol{R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}.\ g_{\rho\sigma} = R_{\sigma\mu\nu\lambda}}$, à noter que les composantes du tenseur métrique inverse sont les cofacteurs/déterminant de celles du déterminant du tenseur métrique d'où $\boldsymbol{g^{\mu\nu}.g_{\mu\nu} = 4}$

Le tenseur métrique (la vedette)

Ce qui précède nous amène à introduire ce tenseur fondamental $\boldsymbol{g_{\mu\nu}}$ **de variance (0, 2) et son inverse** $\boldsymbol{g^{\mu\nu}}$ **de variance (2,0)** qui satisfont à : $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma}$.
L'élément différentiel d'intervalle d'espace temps s'écrit : $\boldsymbol{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} . dx^{\nu}}$
C'est en particulier la variable dynamique utilisée dans les équations de la RG.

L'importance du tenseur métrique dans les espaces courbés est telle qu'un nouveau symbole $g_{\mu\nu}$ lui a été attribué ($\eta_{\mu\nu}$ est réservé à la métrique de Minkowski). Ce tenseur est général, sa seule contrainte étant qu'il doit être un tenseur (0,2) symétrique.
Sauf cas particulier, il est non dégénéré, ce qui veut dire que son déterminant $g = | g_{\mu\nu}|$ n'est pas nul.

La symétrie de $g_{\mu\nu}$ implique que son inverse $g^{\mu\nu}$ l'est aussi. Comme en relativité restreinte , la métrique et son inverse peuvent être utilisés pour abaisser ou élever des index.
La métrique joue un rôle central et déterminant dans la théorie de la Relativité , citons quelques unes des propriétés et applications de $g_{\mu\nu}$:

(1) La métrique fournit une notion de passé et de futur.
(2) La métrique permet le calcul de la longueur des chemins et du temps propre.
(3) La métrique détermine le chemin le plus court entre deux points, et par la même, la trajectoire géodésique des particules .
(4) La métrique remplace le champ gravitationnel Newtonien Φ.
(5) La métrique fournit la notion de référentiel localement inertiel, en conséquence un critère d'absence de rotation.
(6) La métrique détermine la causalité, en définissant les chemins suivis par la lumières comme les plus courts possibles, plus courts qu'aucun autre chemin suivi par un quelconque autre signal ou des particules réelles.
(7) La métrique va permette de réaliser les opérations qui remplacent le produit scalaire de l'espace Euclidien traditionnel de la mécanique Newtonienne, etc..
Ces propositions ne sont pas indépendantes, mais illustrent l'importance de ce tenseur.

Le tenseur métrique de l'espace euclidien 3D est $\boldsymbol{\delta_{\mu\nu}}$: $\boldsymbol{\delta_{\mu\nu}=1}$ si $\boldsymbol{\mu = \nu}$, $\boldsymbol{\delta_{\mu\nu}}= 0$ si $\mu\neq\nu$.
Exemples de tenseurs métriques <u>diagonaux</u> d'espace temps n = 4.

Minkowski (dt,dx,dy,dz):	$\boldsymbol{\eta_{\mu\nu}} =\{-1,$	$1,$	$1,$	$1\}$
Schwarzschild (dt,dr,dθ,dφ)	$\boldsymbol{g_{\mu\nu}} =\{-(1-2GM/r),$	$(1-2GM/r)^{-1},$	$r^2,$	$r^2\sin^2\theta\}$
Robertson Walker (dt,dr,dθ,dφ)	$\boldsymbol{g_{\mu\nu}}=\{-1,$	$a^2/1-kr^2,$	$a^2.r^2,$	$a^2r^2\sin^2\theta\}$

Dérivée covariante d'un vecteur, connexion métrique

Si on calcule la dérivée d'un vecteur par les lois habituelles de dérivation dans une variété, l'objet qu'on obtient, pourrait à première vue ressembler à un tenseur à deux indices. Par contre, comme il n'obéit pas à la loi de transformation des tenseurs, ce n'est pas un tenseur. Nous sommes amenés à définir une nouvelle dérivée, la dérivée covariante, obtenue à partir de la dérivée classique, par « ajout » d'un terme correctif qui se combine linéairement avec le vecteur pour que le résultat soit un tenseur.

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \ .$$

En RG, $\Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}$, est le « symbole de Christoffel », qui n'est pas un tenseur, qui caractérise la « connexion métrique » de l'espace temps courbe, et s'exprime complètement en fonction de la métrique et de ses dérivées.

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \ .$$

Il existe aussi des connexions non métriques, qui ne sont pas utilisées en RG. Vous trouverez un exposé formel d'introduction de la dérivée covariante et de la connexion en : http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG3F.htm

Dérivée covariante d'un tenseur

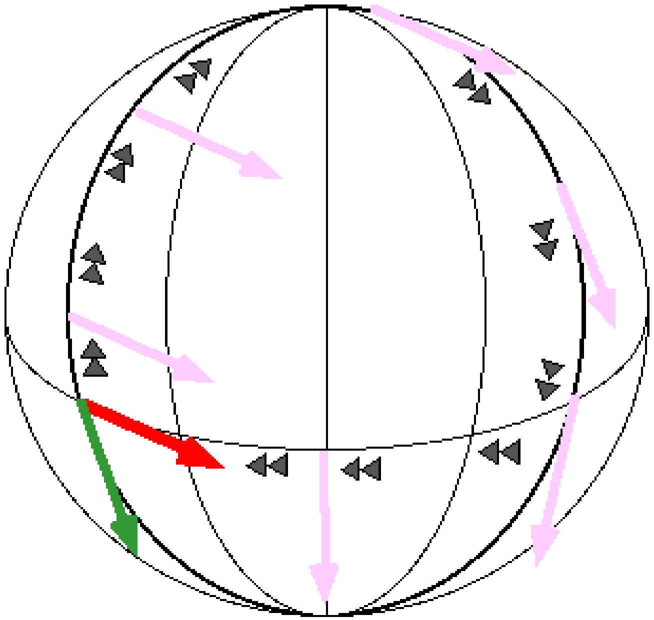
Généralisons le cas des vecteurs aux tenseurs quelconques. La dérivée classique d'un tenseur n'étant pas un tenseur, pour conserver ce caractère tensoriel il faut apporter une succession de termes correctifs (un par élément de variance) et définir par là une dérivée covariante.
La forme générale de la dérivée d'un tenseur de variance (*k,l*) est :

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} = {} & \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ & +\Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda}\, T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda}\, T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ & -\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2} T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} - \cdots \ .\end{aligned}$$

En fait pour un vecteur (tenseur (*0,1*)) la dérivée covariante corrige la variation intrinsèque propre à la courbure de la courbe sur laquelle on opère la dérivation, et rend ainsi compte uniquement de la variation relative du tenseur par rapport à la courbe. Bien entendu dans un espace plat (Minkowski par exemple) les dérivées des vecteurs, tenseurs sont des tenseurs. La dérivée covariante est la dérivée normale...

Transport parallèle d'un vecteur

Le transport // d'un vecteur le long d’une courbe s'obtient en déplaçant le vecteur de façon à conserver l'angle qu'il fait localement avec la courbe (tangente à la courbe).



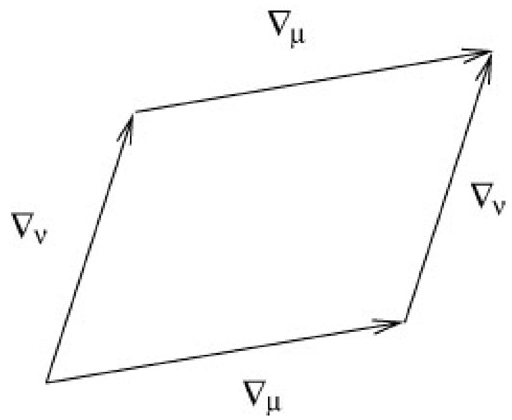
Le vecteur rouge est transporté parallèlement sur le chemin fléché, à l'arrivée (vecteur vert) il a tourné de 90°!
On voit que le résultat dépend du chemin suivi, ce qui explique la difficulté conceptuelle de comparaison des objets dans un espace courbe.

Tenseurs particulièrement utilisés en Relativité Générale

Tenseur de Riemann

Einstein a cherché comment construire un tenseur ne contenant que les dérivées premières et secondes des éléments du tenseur métrique pour construire un tenseur caractérisant la courbure de l'espace temps. Il a trouvé sur le tenseur de Riemann.
Ce tenseur s'établit indépendamment, de façon théorique en faisant parcourir dans un système de coordonnées curvilignes un parallélogramme infinitésimal et en comparant les orientations de départ et d'arrivée d'un vecteur transporté parallèlement sur la courbe. On peut aussi le déduire du commutateur de dérivées covariantes (voir figure ci dessous) qui produit ce tenseur et le tenseur de torsion (supposé nul en RG).

$$[\nabla_\mu,\nabla_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma - T_{\mu\nu}{}^\lambda\nabla_\lambda V^\rho \ ,$$



La différence traduit la courbure et s'exprime par un tenseur assez compliqué: le tenseur de Riemann mixte du 4éme ordre (3 fois covariant et une fois contravariant) dont les éléments sont les dérivées premières et secondes des éléments de la métrique.

A noter que cette courbure est une quantité du deuxième ordre.

L'espace est supposé sans torsion $T_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 0$ (le parallélogramme curviligne est fermé).

Ce tenseur fondamental décrit complètement la <u>Courbure intrinsèque</u> de l'espace temps au point considéré, mesurable par des observateurs confinés dans cet l'espace. (généralisation à N dimensions de la Courbure de Gauss). Ne pas confondre avec la courbure extrinsèque que pourrait avoir l'espace, s'il était plongé dans un espace de dimensions supérieures et qui serait mesuré par des observateurs vivant dans cet espace. Il s'écrit généralement sous la forme:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}.\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}.\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}$$

Quelque chose de compliqué à calculer, combinaison de différences de dérivées de Symboles de Christoffel et de différence de produits de ces symboles.

Si par un choix de coordonnées , on annule localement les dérivées premières du tenseur métrique en un point P, (référentiel chute libre correspondant à un espace tangent de Minkowski), alors le tenseur de Riemann se réduit aux dérivées secondes.

Mais s'il est nul dans un référentiel donné, il l'est dans tous, propriété fondamentale des tenseurs.

En revenant à la définition intuitive des tenseurs, le tenseur mixte de Riemann, 3 fois covariant et 1 fois contravariant , va prendre en entrée 3 vecteurs contravariants *U,V,W* et produire en sortie un vecteur contravariant *W'* qui est issu du transport de W le long du parallélogramme curviligne infinitésimal défini par *U,V* ,

$$W^{\rho} = R(u,v,w)^{\rho} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}.W^{\sigma}U^{\mu}V^{\nu},$$

Ce tenseur possède de nombreuses symétries et anti-symétries (20 composantes indépendantes au maximum pour 256 possibilités) et décrit exhaustivement la courbure locale de l'espace. En utilisant la forme complètement covariante:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}$$

on a :

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = - R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$$

Le tenseur de Riemann étant le commutateur de 2 dérivées covariantes, on obtient ***l'identité de Bianchi*** :

$$\nabla_{[\lambda}R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$$

Celle-ci joue un rôle essentiel dans la théorie de la relativité générale. Par contraction, on déduit :

$$\nabla^{\mu} [R_{\mu\nu} - ½g_{\mu\nu} R] = 0$$

Où on trouve les tenseurs et scalaire de Ricci.

Cette forme suggère directement le tenseur d'Einstein qui est entre crochets (Seul tenseur de variance 2) construit à partir des dérivées premières et seconde du tenseur métrique et à divergence covariante nulle)

Tenseur de Ricci :

Par contraction de deux indices du tenseur de Riemann, $\boldsymbol{R_{\mu\nu}} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$, on obtient le tenseur covariant symétrique d'ordre 2 de Ricci: $\boldsymbol{R_{\mu\nu}}$ (10 composantes indépendantes qui sont la trace du tenseur de Riemann).

Mais où sont les 10 autres composantes indépendantes?

Le tenseur Impulsion Energie ne contient pas toutes les informations au sujet de la courbure , le tenseur de Weyl (qui est conforme,c.a.d invariant par une transformation du type $g_{\mu\nu} \rightarrow \omega^2(x) g_{\mu\nu}$), dont la forme covariante s'écrit,

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{(n-2)}\left(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma} .$$

contient les dix autres composantes indépendantes, complément lié à la courbure propre de l'espace.

Interprétation physique de ces tenseurs

Si on considère une sphère initiale de poussières en mouvement géodésique elle va se déformer en volume et en forme en tombant dans le champ gravitationnel:

Le tenseur de Ricci (qui est nul dans le vide) contrôle la dérivée seconde du changement de volume.

Le tenseur de Weyl (qui n'est pas nul dans le vide) contrôle la forme et déformation (sphère/ellipsoïde) et contrôle les effets de marée par exemple dans le cas d'un objet en chute libre vers la singularité d'un trou noir.

Notons qu'on peut avoir d'autres effets comme le cisaillement transversal et la rotation.

Rappelons, que c'est le tenseur de Ricci et sa contraction qui figure dans l'équation d'Einstein, car la distribution de matière énergie ne définit pas complètement l'espace temps mais ne fait que le contraindre.

Scalaire de Ricci

On l'appelle scalaire de courbure

Par multiplication du tenseur de Ricci par $g^{\mu\nu}$ on obtient le scalaire de Ricci: $R = g^{\mu\nu} \boldsymbol{R_{\mu\nu}}$

Ce scalaire qui résulte de contractions multiples du tenseur de Riemann en synthétise les informations essentielles et est à ce titre très important.

C'est la variation de ce scalaire (qui permet de construire le lagrangien de la gravitation en RG) qui est utilisé pour établir l'équation d'Einstein par application du principe de moindre action (action d'Hilbert).

A noter que Einstein n'a pas procédé ainsi pour établir son équation (il a procédé par analogie avec la mécanique Newtonienne en « transposant » le formalisme de façon à le rendre relativiste).

L'équation de la Relativité générale (équation d'Einstein) en Cosmologie

Rappel : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}(R-2\Lambda)] = -8\pi G T_{\mu\nu}$

Le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci présents dans le membre de gauche sont complètement déterminés par le tenseur métrique et ses dérivées premières et secondes (via une combinaison des **symboles de Christoffel décrivant les connexions métriques,** que l'on peut calculer à partir de la métrique de RW.

$$\begin{vmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ & R_{11} & 0 & 0 \\ & & R_{22} & 0 \\ & & & R_{33} \end{vmatrix} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{R}-2\Lambda) . \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -a^2/(1-kr^2) & & \\ & & -a^2r^2 & \\ & & & -a^2r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = -8\pi G. \begin{vmatrix} T_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{33} \end{vmatrix}$$

$R_{\mu\nu}$ = Tenseur de Ricci $g_{\mu\nu}$=Tenseur Métrique $T_{\mu\nu}$= Tenseur Impulsion/E
R= Scalaire de Rici, Λ = Constante cosmologique.

$T^{\mu\nu} = (p+\rho)U^{\mu}.U^{\nu} - p.g^{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} = T^{\lambda\sigma} = g_{\lambda\mu}\, g_{\sigma\nu} = (p+\rho)U_{\mu}.U_{\nu} - p.g_{\mu\nu}$ dans le cas d'un fluide parfait.

On obtient alors les deux (compte tenu de l'isotropie spatiale en x, y, z) équations ci dessous

$(2/a)(d^2a/dt^2)+(1/a^2)(da/dt)^2+Kc^2/a^2 \; -\Lambda.c^2 = -8\pi Gp/c^2$
$(3/a^2)(da/dt)^2+3Kc^2/a^2 \; - \Lambda c^2 = 8\pi G\rho$

Annexe : Equation Géodésique

Méthode 1 (Géométrique la plus simple)

Partant du fait que la géodésique est une droite en RR on effectue le changement de coordonnées pour trouver son équivalent dans un système quelconque. Le résultat ne met pas directement en évidence que cette équation ne dépend que de la métrique.

Méthode 2 (Définie par le vecteur tangent)

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = 0 \, ,$$

qui implique

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \, .$$

Méthode 3 (Méthode « physique » originale d'Einstein)

On écrit que la géodésique est la courbe qui minimise l'intégrale du chemin (ds).

En fait Einstein utilise sans le dire, le Lagrangien :

$$L(x,dx/dp) = ½(g_{\mu\nu}).\ (dx^{\mu}/dp)\ (dx^{\nu}/dp)$$

qui n'est autre que:

$$L= ½(ds^2/dp^2)$$

l'intervalle d'espace temps et en appliquant le principe variationnel (équations de Lagrange):

$$d/dp(\partial L/\partial(dx^{\mu}/dp)) = \partial L/\partial x^{\mu}$$

on arrive à[4]:

$$\boldsymbol{d^2x^{\sigma}/ds^2+ \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}.(dx^{\mu}/ds)(dx^{\nu}/ds) = 0}$$

4 Rappelons que l'équation du mouvement géodésique est contenue dans l'équation du champ.

Annexe 2: La déviation géodésique.

La déviation géodésique

Nous savons que la géométrie Euclidienne s'appuie sur le postulat des parallèles qui ne se rencontrent jamais. Dans un espace courbe, ceci n'est plus vrai, sur une sphère, une géodésique parallèle en un point à une autre peut la couper. Nous devons quantifier cette propriété dans un espace courbe arbitraire.

L'équation de déviation géodésique

$$a^\mu = \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \ , \qquad (3.113)$$

Cette formule est appelée **l'équation de déviation géodésique** Elle exprime quelque chose qui était prévisible : l'accélération relative entre deux géodésiques est proportionnelle à la courbure.

D'un point de vue physique, l'accélération entre géodésiques voisines est interprétée comme la manifestation des forces de marée. Cela nous rapproche de la physique.

Exercices : 1-La dérivée covariante

Quels définitions et calculs pour vous mettre le pied à l'étrier

Dérivée covariante

Nous voudrions définir un opérateur de **dérivée covariante** ∇ qui réaliserait l'opération de dérivée partielle, mais de façon indépendante des coordonnées.

Propriétés fondamentales

Nous exigerons donc de ∇ qu'il soit une application linéaire de tenseurs (k, l) vers des tenseurs $(k, l+1)$ avec les deux propriétés suivantes:

1. linéarité:

   $\nabla(T+S) = \nabla T + \nabla S$;

2. règle de Leibniz (produit) : $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.

Si ∇ obéit à la règle de Leibniz il peut toujours être écrit comme une dérivée partielle plus une transformation linéaire. Pour prendre la dérivée covariante, nous commençons par prendre la dérivée partielle et nous appliquons une correction pour rendre le résultat covariant (nous n'allons pas en faire la preuve, mais vous la trouverez dans "Wald" si cela vous intéresse). Considérons le cas d'un vecteur V^ν. Cela signifie que pour chaque direction μ, la dérivée covariante ∇_μ va consister en la dérivée partielle ∂_μ plus une correction spécifiée par une matrice $(\Gamma_\mu)^\rho{}_\sigma$. (une matrice $n \times n$, où n est la dimension de la Variété pour chaque index μ).

Coefficients de connexion

En fait les parenthèses sont généralement omises et nous écrirons ces matrices appelées **coefficients de connexion**, de la manière suivante $\Gamma^\rho_{\mu\sigma}$. Nous avons donc

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \ . \qquad (3.1)$$

Remarquons que dans le second membre, l'index original du vecteur V a été transféré vers Γ , et le nouvel index ne sert qu'à la sommation. Si c'est bien l'expression de la dérivée covariante d'un vecteur en termes de dérivée partielle, nous devrions être capables de déterminer les propriétés de transformation de $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$, en exigeant que le membre de gauche soit un tenseur (1,1).

Propriétés des transformations des dérivées covariantes de Vecteurs

Donc, nous voulons que la loi de transformation soit :

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \nabla_{\mu} V^{\nu} \ . \qquad (3.2)$$

Commençons par le membre de gauche, on peut le développer en utilisant (3.1) et ensuite transformer les parties par les règles que nous connaissons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} V^{\lambda'} \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} V^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} V^{\lambda} \ . \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Le membre de droite peut être développé de façon similaire :

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \nabla_{\mu} V^{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda} \ . \qquad (3.4)$$

Ces deux expressions doivent être égalées, le premier terme de chaque est identique et s'annule donc, alors nous avons :

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} V^{\lambda} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} V^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda} \ , \qquad (3.5)$$

Où nous avons renommé l'index de sommation ν en λ. Cette équation doit être vraie pour tout vecteur V^{λ}, donc nous pouvons l'éliminer des deux membres. Ensuite les coefficients de connexion dans les coordonnées "primées" peuvent être isolées en multipliant par $\partial x^{\lambda} / \partial x^{\lambda'}$.
Le résultat est :

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} \ . \qquad (3.6)$$

Ce n'est évidemment pas une loi de transformation de tenseur, à cause du second terme.

Ceci est normal puisque *les coefficients de connexion ne sont pas des tenseurs*. Par construction, les Γ's sont non tensoriels puisqu'ils sont destinés à "corriger" et rendre tensoriels les dérivées partielles qui ne le sont pas, autrement dit annuler le terme qui détruit le caractère tensoriel (donc qui n'est pas un tenseur!) de l'expression (3,1). C'est pourquoi il faut être attentif aux placements des index dans les coefficients de connexion, ils ne sont pas des tenseurs et nous ne pouvons pas les abaisser ou les élever à l'envi.

Exercice : (Difficile) Montrer que la dérivée partielle ∂_{μ} d'un vecteur V^{λ}, n'est pas un tenseur :

Méthode suggérée : Appliquer les dérivées partielles dans chacun des systèmes de coordonnées, utiliser la loi de transformation des vecteurs $V^{\mu'} = (\partial x'^{\mu} / \partial x^{\mu}) . V^{\mu}$, appliquer la loi de composition des dérivations partielles d'un système de coordonnées vers l'autre et remarquer que le résultat n'est pas conforme à la loi de transformation relative aux tenseurs. Attention aux manipulations d'indices !

2- La courbure d'un espace défini par la métrique de Robertson Walker (RW)

Rappel : l'élément différentiel d'intervalle d'espace temps : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ en métrique RW s'écrit :

$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) [dr^2/1-kr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta. d\varphi^2)]$

- Dans le cas d'un espace " plat" caractérisé par k = 0,

1-(Pour les courageux) Calculer le scalaire de Ricci « R » (scalaire de courbure)

2- Pour les moins courageux, on donne la valeur générale de « R », $R = 6 [(a''/a) + (a'/a)^2 + (k/a^2)]$. Pour un univers Einstein de Sitter où k = 0 et $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, quelle est la valeur de R. Que remarquez vous ?

3- Pour un univers plat et vide de « de Sitter » k= 0 avec une constante cosmologique Λ, la solution est $a(t) = a_0.\exp [(\Lambda/3)^{1/2} .t]$.

Calculez R : Remarques ?

Quelques exercices simples de manipulation de tenseur (réponses en rouge).

1- La métrique de Schwarzschild en coordonnées sphériques (t, r, θ, φ) et signature (-, +, +, +) s'écrit, avec μ qui varie de 0 à 3:
$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1-\beta^2)\, dt^2 + dr^2/(1-\beta^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, où $\beta^2 = 2m/r$. On travaille en unités « naturelles » où $G = 1, c = 1$.
Q1- Donner les différentes valeurs des composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Rép: $g_{00} = -(1-\beta^2)$, $g_{11} = 1/(1-\beta^2)$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=r^2\sin^2\theta$, autres = 0

2- Le vecteur de base (contravariant) associé à la coordonnée $r = x^1$ (coordonnée de rang 1) qu'on désigne par $(\partial_r)^\mu$, (parce qu'il est tangent à la coordonnée *r)* a pour coordonnées (t, r, θ, φ) contravariantes: $(\partial_r)^\mu=\{0, 1, 0, 0\}$.
Q2- Justifier ces coordonnées. Rép: C'est un des vecteurs de la base (localement) des coordonnées (tangent à la coordonnée r)

3- On définit trois types de vecteurs en Relativité: Vecteur de Type temps, de type espace, de type lumière (ou nul). Ce type est déterminé par son (auto) produit scalaire S qui en termes de composantes du vecteur ***V*** s'écrit: $S= V^\mu V_\mu = V^0V_0 + V^1V_1 + V^2V_2 + V^3V_3$
Notez bien la position des indices et que la sommation conformément à la convention d'Einstein s'effectue sur l'indice commun haut/bas, ici μ.
Si S est négatif, le vecteur est de type temps, s'il est positif de type espace et s'il est nul de type lumière (ou nul).

Q3- Calculer le type du vecteur $(\partial_r)^\mu$: (note, il faut commencer par calculer la version covariante du vecteur $(\partial_r)_\mu$ par l'équation $V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$ et ensuite exécuter le produit scalaire). Rép: $(\partial_r)_\mu = g_{\mu\nu}(\partial_r)^\nu = g_{11}(\partial_r)^1 = (\partial_r)_1 = 1/(1-\beta^2)$, car les autres termes de $g_{\mu\nu}(\partial_r)^\nu$ sont nuls!
Le produit scalaire $S = (\partial_r)_\mu(\partial_r)^\mu = (\partial_r)_1(\partial_r)^1 = [1/(1-\beta^2)][1] = 1/(1-\beta^2)$, car seul les termes de la composante 1 sont non nuls.
A partir de la valeur de β en fonction de r décrire l'évolution du type du vecteur en fonction de r. Que remarquez vous?:
Rép: Il est positif (de type espace) pour $\beta^2 < 1$, soit $r > 2m$, (à l'extérieur de l'horizon), non défini, pour $\beta^2 = 1$ soit $r = 2m$ (sur l'horizon) , négatif (de type temps) pour $\beta^2 > 1$ soit $r < 2m$ (sous l'horizon). La coordonnée r devient de type temps sous l'horizon, impliquant le mouvement !

4- Il existe d'autres formes qui décrivent la solution d e Schwarzschild, par exemple celle de Painlevé qui s'écrit:
$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1-\beta^2)\, dt^2 + 2\beta.\, dr.dt + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.
Même questions Q1, Q2, Q3 que précédemment. Attention la métrique n'est plus diagonale! Quand vous allez calculer les composantes covariantes par $V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$ vous allez avoir des termes du type $V_1 = g_{10}V^0$ qui vont contribuer!
Quelles différences notez vous avec la forme de la métrique précédente?
Q1: $g_{00} = -(1-\beta^2)$, $g_{01} = g_{10} = \beta$, $g_{11} = 1$, $g_{22}=r^2$, $g_{33}=r^2\sin^2\theta$, autres = 0.
Q2: Idem cas précédent.
Q3: $(\partial_r)_\mu = g_{\mu\nu}(\partial_r)^\nu \rightarrow (\partial_r)_0 = g_{01}(\partial_r)^1 = \beta$ et aussi $(\partial_r)_1 = g_{11}(\partial_r)^1 = 1$, les autres sont nulles. Le vecteur $(\partial_r)_\mu$ a <u>deux</u> composantes non nulles!
Le produit scalaire: $S = (\partial_r)_\mu(\partial_r)^\mu = (\partial_r)_1(\partial_r)^1 = [1][1] = 1$. Les autres produits sont nuls. Le vecteur $(\partial_r)^\mu$ est constant et est toujours de type espace à la différence du cas précédent. Comme $(\partial_t)^\mu$ devient de type espace sous l'horizon, les <u>4 coordonnées sont alors de type espace sous l'horizon</u>!