Paul Langevin et l'effet Sagnac (1921)

Jacques Fric[1]- Laboratoire Sphère, Université Paris-Diderot

Paul Langevin (CRAS du 7/11/1921 « Sur la théorie de la Relativité et l'expérience de Mr Sagnac ») répond aux doutes de certains de ses collègues de l'Académie des Sciences qui se demandaient si l' expérience de Sagnac[2] , n'invalidait pas la relativité restreinte, (stipulant qu'on ne pouvait pas détecter le mouvement d'un système inertiel par des expériences internes au système)[3], puisque cette expérience permet de détecter la rotation et d'autre part ils se demandaient ce que prédit la relativité.

Paul Langevin va proposer une résolution géométrique du problème à partir de la métrique relativiste et pour montrer qu'au premier ordre la solution relativiste converge avec la solution newtonienne, il va supposer que la vitesse de rotation tangentielle est très petite devant celle de la lumière ($1 \pm \omega^2 r^2/c^2 \approx 1$).

Langevin fait d'ailleurs observer que cette expérience qui comporte un résultat au premier ordre est moins discriminante vis à vis des théories qu'elle permet de vérifier que celle de Michelson qui est une expérience au deuxième ordre.

Nous reprenons le principe de sa méthode, mais en la généralisant et en utilisant des coordonnées polaires (c'est un problème à 2 dimensions spatiales) plus pratiques que les coordonnées cartésiennes qu'il utilise dans sa démonstration.

Le résultat au premier ordre sera retrouvé en faisant la même approximation que lui, mais à partir du résultat général.

Métrique de Minkowski associée au référentiel (R_0), extérieur à l'instrument :

$$ds^2 = c^2dt^2 - r^2d\Phi^2 \qquad [1]$$

Métrique sur le repère (R_1) en co-rotation de vitesse angulaire ω associé à l'instrument :

$$ds^2 = (c^2-\omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\omega .r^2dt.(d\varphi) - r^2.(d\varphi)^2 \quad [2]$$

car : $$(\Phi) = (\varphi) + \omega .t$$

On note que la coordonnée t est commune à [1] et [2] et que dans [1], t est le temps propre d'un observateur statique.

Pour un photon $ds^2 = 0$, [2] s'écrit :

$$(c^2-\omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\omega r^2dt.d\varphi - r^2d\varphi^2 = 0 \qquad [3]$$

On considère [3] comme une équation du second degré en dt. Ceci donne pour les 2 racines :

1 Fric.jacques@sfr.fr
2 Plateforme faisant interférer, par un jeu de miroirs, deux faisceaux lumineux de directions opposées, montées sur un disque en rotation.
3 On peut faire remarquer qu'un système en rotation n'est pas un système inertiel, donc que le principe de relativité ne s'applique pas.

$$dt = (d\varphi)\,[(\omega r^2/c^2)\ \ +/-\ \ (r/c)] / (1 - \omega\,^2 r^2/c^2) \qquad [4]$$

L'une des racines correspond au photon en co-rotation et l'autre à un photon en contre-rotation.

En intégrant[4] φ de 0 à 2π, où $A = \pi.r^2$ est l'aire du disque et $L= 2\pi r$ est le périmètre du cercle, on obtient:

$$t = [(2\pi\omega r^2)/c^2 +/- L/c]/ (1 - \omega\,^2r^2/c^2) = [(2\omega A)/c^2 +/- L/c] / (1- \omega\,^2r^2/c^2) \qquad [5]$$

t est la coordonnée temps de la métrique, qui est aussi le temps propre de l'observateur « extérieur statique » dans le repère R_0. C'est ce que devrait constater un observateur extérieur à l'instrument en rotation.

Comme l'instrument (l'interféromètre) est sur la plateforme en rotation, (expérience interne au système), c'est le temps propre τ de l'observateur (virtuel) qui serait attaché au repère tournant qui va intervenir dans la mesure. Avec φ = constante, [2] devient :

$$d\tau\,^2 = ds^2/c^2 = (1 - \omega\,^2r^2/c^2)\, dt^2 \qquad [6]$$

Soit $d\tau = dt\,(1 - \omega\,^2r^2/c^2)^{1/2}$ ce qui, en intégrant donne :

$$\tau = t\,(1 - \omega\,^2r^2/c^2)^{1/2} \qquad [7]$$

En reportant dans [5]

$$\tau = = [(2\omega A)/c^2 +/- L/c] / (1- \omega^2r^2/c^2)^{1/2} \qquad [8]$$

donc la différence $\Delta\tau$ entre le temps de parcours τ_1 d'un photon en co-rotation et celui d'un photon en contre-rotation τ_2 dans le repère (R_1) solidaire de la plateforme en rotation vaut :

$$|\tau_1 - \tau_2| = \Delta\tau = [(4\omega A)/c^2] / (1 - \omega\,^2r^2/c^2)^{1/2}$$

C'est ce que devait constater (mesurer avec son horloge ou en observant les franges d'interférences) un observateur solidaire de l'instrument en rotation.

Si on néglige $\omega\,^2r^2/c^2 << 1$, on obtient alors le résultat au premier ordre qui est identique à celui donné par la mécanique newtonienne

$$\Delta\tau_{1st} = = [(4\omega A)/c^2]$$

C'est le résultat du calcul fait par Paul Langevin qui a pris en compte cette approximation au premier ordre dès le début dans son article.

4 La constante d'intégration peut être ignorée car elle s'élimine.dans le calcul final.