Cours de cosmologie: Cinquième partie
Questions- FAQ- Suggestions

Entropie de l'univers, l'univers est il un trou noir, programme du cours de l'an prochain

Entropie de l'univers

Cette question a été soulevée: On peut effectivement se demander quel lien la dynamique de l'univers entretient avec la thermodynamique: En particulier est elle conforme au deuxième principe?

De plus l'évolution de l'entropie au cours de son histoire peut nous renseigner sur son devenir à partir de son passé et conforter les modèles retenus.

L'entropie étant un concept assez délicat, nous commençons a en rappeler la (les) définitions et étudions son évolution dans différentes phases de son évolution, y compris l'inflation.

Entropie : Définition

En thermodynamique, l'**entropie** est une fonction d'état introduite en 1865 par Rudolf Clausius dans le cadre du second principe, d'après les travaux de Sadi Carnot.

Clausius a montré que le rapport Q/T (où Q est la quantité de chaleur échangée par un système à la température T) correspond, en thermodynamique classique, à la variation d'une fonction d'état qu'il a appelée **entropie, S** et dont l'unité est le joule par kelvin (J/K).

La thermodynamique statistique a ensuite fourni un nouvel éclairage à cette grandeur physique abstraite : **elle mesure le degré de désordre d'un système au niveau microscopique**. Plus l'entropie du système est élevée, moins ses éléments sont ordonnés, liés entre eux, capables de produire des effets mécaniques, et plus grande est la part de l'énergie inutilisée pour l'obtention d'un travail ; c'est-à-dire gaspillée de façon incohérente. Ludwig Boltzmann a exprimé l'entropie statistique en fonction du nombre d'états microscopiques Ω définissant l'état d'équilibre d'un système donné au niveau macroscopique : formule de Boltzmann .

Cette nouvelle définition de l'entropie n'est pas contradictoire avec celle de Clausius. Les deux expressions de l'entropie résultent simplement de deux points de vue différents, selon que l'on considère le système thermodynamique au niveau macroscopique ou au niveau microscopique.

Entropie de la théorie de l'information

Dans une période récente, le concept d'entropie a été généralisé et a pénétré dans de nombreux domaines, tels que par exemple :

l'entropie de Shannon dans le cadre de la théorie de l'information en informatique :

L'**entropie de Shannon**, due à Claude Shannon, est une fonction mathématique qui, intuitivement, correspond à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information. L'entropie de Shannon d'une variable aléatoire discrète *X*, avec n réalisations possibles, 1..*n*, est définie comme suit :

$$H_b(X) = -\mathbf{E}[\log_b P(X = x_i)] = \sum_{i=1}^{n} P_i \log_b \left(\frac{1}{P_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_b P_i.$$

où désigne l'espérance mathématique. On utilise en général un logarithme à base 2 car l'entropie possède alors les unités de bits/symbole. Les symboles représentent les réalisations possibles de la variable aléatoire X.

$$H(X) = H_2(X) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i.$$

elle est maximale pour une distribution uniforme, c'est-à-dire quand tous les états ont la même probabilité, toutes choses égales par ailleurs, elle augmente avec le nombre d'états possible (ce qui traduit l'intuition que plus il y a de choix possibles, plus l'incertitude est grande), elle est continue . Brillouin a montré l'équivalence des 2 approches. Applications : Télécommunications, codages entropiques dans des systèmes tels que MP3 (musique), MPEG2(TV numérique) etc…

Entropie et l'univers

Il est équivalent de dire que l'entropie mesure le nombre de façons qu'un système a d'être arrivé dans un état donné. Donc un paquet de cartes battu a une entropie supérieure à un paquet de cartes neuf classé dans un ordre donné. Ajouter de l'énergie à un système , augmente en général le nombre d'états, et accroît l'entropie. La température d'un système est définie de telle sorte que kT est l'énergie nécessaire pour augmenter le nombre d'états possibles par un facteur e = 2.71828... où k est la constante de Boltzmann. Transférer de la chaleur d'une pièce chaude d'un système vers une pièce plus froide augmente le nombre de façons d'arranger la partie froide par un facteur bien supérieur que la décroissance du nombre de façons d'arranger la pièce chaude. Donc le flux normal de la chaleur du chaud vers le froid augmente le nombre de façons dont le système global peut être arrange ce qui accroît son entropie. L'entropie ne s'accroît pas nécessairement dans les systèmes ouverts. L'énergie peut permettre de faire décroître l'entropie d'un système particulier. Votre réfrigérateur le fait en extrayant la chaleur intérieure, si vous considérez l'intérieur de votre réfrigérateur comme un système indépendant. Bien sûr si on considère les parties internes et externes du réfrigérateur, il y a accroissement de l'entropie du fait du rendement imparfait du réfrigérateur. Comme l'entropie est un concept statistique, des fluctuations à court terme dans des petits systèmes autorise une décroissance temporaire de l'entropie. L'entropie reste constante dans un système à température uniforme (à l'équilibre thermique) si on n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. On pense que c'est plus ou moins le cas pour l'univers ou pour une partie représentative de celui ci qui se contracte ou s'étend de la même manière. L'écrasante majorité de l'entropie de l'Univers est contenue dans le RFC car la majorité des particules sont les photons du RFC [Un milliard de photons par baryon environ] .

Entropie thermodynamique

Un point crucial est la compréhension au niveau microscopique, de la thermodynamique, en terme de mécanique statistique portant sur un grand nombre de particules élémentaires et de quanta. En général, l'équilibre statistique requiert un nombre incessant d'interactions entre les constituants du système.

Si la fréquence d'interactions est suffisante alors la description de l'évolution de l'univers à travers une séquence d'états en équilibre thermique est bonne et nous pouvons utiliser les paramètres thermodynamiques, la température T, la pression p, la densité d'entropie s, et d'autres à chaque instant t pour décrire l'état de l'univers.

L'entropie $S\ (V,T)$ a été introduite comme une des équations clés de la thermodynamique par sa variation.

$$dS(V,T) = \frac{1}{T}\left[d(\rho(T)V) + p(T)dV\right] \tag{7.37}$$

Conservation de l'Entropie

L'équation de Friedman nous donne:

$P.d(a^3) + d(\rho.a^3) = P.dV + dU = 0$

Cette équation est l'équation de conservation de l'énergie! L'univers n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. Si on se rappelle que:

$dU = TdS - P.dV$

on obtient $dS = 0$. L'expansion de l'univers est adiabatique et son entropie totale reste conservée

Nous trouvons finalement la conservation de l'entropie dans le volume $a^3(t)$ ainsi que nous l'avions annoncé.

Avec une constante cosmologique , comme elle se comporte comme un fluide de densité constante $\rho V = \Lambda/8\pi G$ et de pression négative $P = -\rho V$

On a: $P.dV + dU \equiv 0$.

La variation d'entropie est identiquement nulle!

Découplage et entropie

Considérons maintenant la question du découplage des neutrinos de l'équilibre thermique dans l'univers primordial. Comme nous l'avons indiqué, les particules interagissant faiblement comme les neutrinos, se découplent en dessous d'une température T_{dec} quand le taux d'interaction entre les particules n'est plus assez rapide pour lutter contre l'expansion de Hubble de l'espace. Qu'arrive il quand les neutrinos se sont découplés? Tous les neutrinos vont se comporter en particules libres suivant l'expansion de Hubble. Ce qui implique que leurs énergies vont être réduites, comme pour les photons par le facteur d'expansion a/a_{dec}. Il vont rester dans une distribution (Fermi Dirac) d'équilibre thermique de température. Donc même après son découplage, la distribution de neutrinos va être la même que s'il était resté à l'équilibre thermique (distribution gelée) tant que $g^s{}_{eff}$ ne change pas. Cependant $g^s{}_{eff}$ va changer quand les électrons et les positons vont cesser d'être relativistes et vont s'annihiler par la réaction $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Cela se produit à une température de $1\ MeV$, car en dessous la réaction inverse $\gamma\gamma. \rightarrow e^+e^-$, n'est plus cinématiquement possible (la masse au repos d'une paire positon électron est de $1.22\ MeV$). Calculons le nombre de degrés de libertés avant et après l'annihilation e^+e^- .Les neutrinos sont déjà découplés , donc à une température sensiblement supérieure à $1\ MeV$ les espèces relativistes en équilibre thermique sont e^+e^- et les γ, ce qui donne $(g^s{}_{eff})^{avant} = 2.3.7/8 + 2 = 11/2$ alors qu'en dessous de $1\ Mev$, seuls les photons sont en équilibre thermique donnant $(g^s{}_{eff})^{après} = 2$.Comme l'entropie totale des particules à l'équilibre est conservée :

Découplage et entropie

Il y a un transfert d'entropie des particules *e+ e-* qui se découplent aux photons, qu'on appelle un « réchauffement » (bien qu'en fait la température n'augmente pas, simplement elle décroît plus lentement pour les photons du fait du transfert d'entropie). Par contre, les neutrinos déjà découplés, ne bénéficient pas du « réchauffement ». Ils ne font que suivre la loi due à l'expansion de l'Univers $(aT_\nu)_{avant} = (aT_\nu)_{après}$. On peut l'interpréter en disant que l'entropie est conservée séparément après le découplage. Cela implique une différence de température entre les photons et les neutrinos après le découplage e^+e^- , de :

Comme le RFC (photons) a maintenant une température de *2.73K*, il doit y avoir un fond de neutrinos cosmologique ayant un spectre d'énergie de Fermi Dirac de température $T_\nu = 1.95\ K$. Quelle est l'entropie totale et la densité d'énergie du rayonnement aujourd'hui ? C'est donné par les contributions des photons et des trois espèces de neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) soit:

$$g_{\rm eff}^{tot}(today) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} = 3.36 \qquad (7.60)$$

Inflation et entropie

Si nous introduisons l'entropie totale comme mesure de la taille des régions causalement connectées de l'univers , cela nous permet de quantifier le phénomène. Cela signifie qu'à la recombinaison, l'entropie à l'intérieur de l'horizon était environ de 10^{83}, soit un facteur 10^5 plus faible que l'entropie aujourd'hui. On doit donc expliquer comment 10^5 régions qui étaient déconnectées, peuvent être à la même température. Dans un modèle typique d'inflation, le champ scalaire associé à la transition de phase (appelé quelquefois le champ d'inflaton) est actif à des échelles de températures proches de celle de la grande unification $T_{gut} = 10^{15}$ *GeV,* quand le temps de Hubble valait 10^{-34} sec, et supposons que cette inflation a duré 10^{-32} sec. (Ceci peut sembler être un temps court, mais rappelons que l'échelle de temps adéquate en cosmologie, est le temps de Hubble, et dans cette échelle l'inflation a duré *100* fois le temps de Hubble, c'est à dire cent fois l'âge qu'avait l'univers quand l'inflation a commencé.) Quand l'inflation a cessé , l'énergie du vide du champ de l'inflaton a été transférée aux particules ordinaires, et un réchauffement de l'univers en a résulté.(Pendant l'inflation, l'univers s'est considérablement refroidi, l'entropie restant constante à un bas niveau, soit $a.T = constante$, ce qui se traduit par $T \approx e^{-Ht}$). La température de réchauffement est de l'ordre de celle de la transition de phase, $T_{RH} \approx 10^{15}$ *GeV* (si l'inflaton est suffisamment fortement couplé avec la matière ordinaire, comme on le suppose dans les modèles d'inflation qui marchent).

Inflation et entropie

Considérons une petite région d'un rayon d'environ 10^{-23} cm avant l'inflation. L'entropie dans ce volume est d'environ 10^{14}. Après l'inflation, de la région s'est accrue d'un facteur $(e^{100})^3$ soit environ $1.9.\ 10^{130}$, alors après la génération d'entropie liée au réchauffement, l'entropie totale dans la région s'est établie à 10^{144}.

De l'entropie est générée car l'équation d'état qui était $p = -\rho$ avant devient $p = \rho/3$ après, ce qui signifie que la densité d'entropie $s \approx p + \rho$ s'accroît considérablement.

Cet accroissement énorme d'entropie résout trois des quatre problèmes cités précédemment. Le problème de l'horizon, est résolu car notre univers observable peut être issu d'un volume minuscule dont tous les points étaient en contact causal avant l'inflation. La région lissée par l'inflation, a bien plus d'entropie qu'il ne faut, pour y inclure tout notre univers observable.

L'univers est il un trou noir?

- Cette question rencontre toujours un certain succès car on peut faire observer que si on considère une sphère "co-mobile" du fluide cosmique, remplissant l'univers, dans le passé, comme sa masse est constante et que son rayon diminue on constate que ce rayon peut devenir inférieur au rayon de Schwarzschild (et que avant il l'était) et on se demande donc comment l'univers ne s'est pas effondré!!!
- En fait remarquons que selon cet argument, il n'aurait jamais dû commencer car à $t = 0$ toute la masse est contenue dans un volume nul.
- Comment expliquer ce mystère?

Big bang et singularité d'un trou noir

Dans la FAQ on fait remarquer que les singularités sont de nature différentes.

"Les deux sont des singularités, mais celle liée au Big Bang est différente de celle liée à un Trou Noir . Le Big Bang est une singularité qui s'étend à tout l'espace au même moment, alors qu'un Trou Noir est une singularité en un point de l'espace qui s'étend éternellement dans le temps"

On peut ajouter qu'un trou noir de Schwarzschild est un espace temps statique (gelé) dont l'espace est totalement vide (à l'exception de la singularité centrale) et qui a un centre (l'espace est à symétrie sphérique: isotrope mais pas homogène) alors que dans les espaces temps de solutions cosmologiques (Friedmann Lemaître) l'espace est rempli de fluides divers, il est homogène et isotrope et de plus dynamique.

Ces différences structurelles importantes font que les métriques utilisées sont différentes et que l'équation d'Einstein qui décrit à la solution: $\boldsymbol{G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$

est différente à double titre: Métriques différentes (qui valorisent différemment le tenseur d'Einstein $\boldsymbol{G_{\mu\nu}}$) et tenseur énergie impulsion ($\boldsymbol{T_{\mu\nu}}$) nul dans le cas des trous noirs (on est dans le vide) et pas nul dans les solutions de Friedmann Lemaître (l'univers est rempli d'un fluide).

La résolution (intégration) de ces équations différentielles (locales) conduit naturellement à des solutions différentes.

Et dans un univers univers réel?

- Les solutions que nous avons décrites sont des modèles "idéaux" (Les seuls qu'on sait résoudre analytiquement). En pratique la situation n'est pas aussi idéale, en particulier les symétries décrites ne sont qu'approximativement satisfaites.
- Ce qui est important c'est d'étudier la stabilité de la solution par rapport à de petites perturbation des hypothèses.
- Les équations d'Einstein relèvent d'un principe extrémal (comme bon nombre d'équations de la physique) ce qui garantit une stabilité pour des écarts pas trop importants!
- Ces modèles ne peuvent fournir qu'une approximation de la situation réelle (comme dans un gaz parfait qu'on assimile à un fluide alors qu'il est fait de molécules de taille diverse).
- Dans notre univers il existe des trous noirs, des étoiles, des galaxies etc...et il s'en forme. Localement l'univers n'est ni homogène ni isotrope, mais il l'est à grande échelle (> 100 Mpc)
- Donc des trous noirs, des étoiles des galaxies,..., peuvent se former localement mais leur échelle de perturbation (même pour les trous noirs supermassifs) est en général trop faible par rapport à l'échelle de l'univers pour en altérer sérieusement la dynamique globale (mais localement elle peut être évidemment très différente: par exemple dans notre galaxie l'expansion est insensible du fait de la liaison gravitationnelle forte). Notons que c'est d'ailleurs le fait que certains objets sont insensibles à l'expansion qui permet de se rendre compte de l'expansion de l'univers.....!

Suggestion de cours pour 2010

Dans le prolongement du cours de 2009 je suggère:

Notion de Variété

Notion de Tenseur

L'équation d'Einstein

La métrique de Robertson Walker

Quelques fluides cosmologiques.

L'équation de Friedmann où comment utiliser l'équation d'Einstein pour trouver une solution d'univers.

Quelques solutions

Comparaison avec la solution du trou noir sphérique: Ressemblances, différences