

The river model of black holes

Andrew J. S. Hamilton* and Jason P. Lisle
*JILA and Dept. Astrophysical & Planetary Sciences,
 Box 440, U. Colorado, Boulder CO 80309, USA*

arXiv :gr-qc/0411060 v2 31 Aug 2006

Le Modèle de la rivière pour les trous noirs

Traduction J.Fric qui endosse la responsabilité des erreurs que sa traduction aurait pu introduire.

I - Introduction

Comme l'ont souligné en 1921 Allvar Gullstrand [1] et Paul Painlevé [2], la métrique de Schwarzschild peut s'écrire :

$$ds^2 = - dt_{ff}^2 + (dr + \beta dt_{ff})^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

où β est la vitesse de libération Newtonienne à une distance r d'un corps sphérique de masse M , avec $c = 1$.

$$\beta = \left(\frac{2GM}{r} \right)^{1/2} \quad (2)$$

et t_{ff} est le temps propre d'un objet lâché à l'infini avec une vitesse nulle, en chute libre radiale entrante .

Bien que l'article de Gullstrand ait été publié en 1922 après celui de Painlevé, il jouit d'une certaine antériorité car il est daté du 25 mai 1921 alors que la présentation de Painlevé à l'académie des Sciences de Paris date du 24 octobre 1921 . De plus Gullstrand semble avoir mieux compris le sens de cette découverte, reconnaissant que les observables comme le décalage spectral de la lumière du Soleil ne dépendent pas du choix des coordonnées, tandis que Painlevé, relevant que la métrique spatiale était euclidienne à $t_{ff} = \text{constante}$, conclut dans son article, au sujet de ce décalage spectral, que « c'est pure imagination que de prétendre tirer du ds^2 des conséquences de cette nature ».

Comme nous le montrerons au chapitre II, la forme de la métrique de Gullstrand-Painlevé présente une image conceptuelle simple et élégante de la géométrie de Schwarzschild : Elle ressemble à un espace euclidien avec la particularité que cet espace lui-même s'écoule radialement vers le centre, en tout point à la vitesse de libération Newtonienne.

La vitesse radiale entrante atteint la vitesse de la lumière ($\beta = 1$) sur l'horizon.

A l'intérieur de l'horizon la vitesse radiale entrante est supérieure à la vitesse de la lumière.

Représentons l'espace comme une rivière s'écoulant dans un trou noir de Schwarzschild. Imaginons les rayons lumineux, les photons, comme des poissons nageant vaillamment dans le courant. A l'extérieur de l'horizon les photons-poissons nageant vers l'amont peuvent remonter le courant. Mais à l'intérieur de l'horizon la rivière est si rapide, qu'aucun photon-

poisson ne peut la remonter et ils sont inéluctablement emportés par le courant vers la singularité centrale.

Ceci est représenté par une vue d'artiste sur la figure 1.



Figure 1 : Le poisson en haut peut remonter le courant, mais celui du bas ne le peut pas et est emporté vers le bas de la chute d'eau. La Figure 1 de [5] présente une description similaire.

Le modèle de la rivière présente l'avantage de pouvoir être compris sans l'utilisation des mathématiques, ce qui le met à la portée des non experts.

Il illustre pourquoi, sous l'horizon, la lumière ne peut pas s'échapper des trous noirs et pourquoi une étoile ne peut pas être statique sous l'horizon. Il illustre comment un objet étendu peut être étiré longitudinalement par l'accélération interne de la rivière et compressé transversalement par la convergence du flot. Cela explique pourquoi un objet qui tombe vers l'horizon du trou noir apparaît à un observateur extérieur se geler et être de plus en plus redshifté lors de son approche de l'horizon: Plus l'objet approche de l'horizon plus les photons-poissons perdent leur force (énergie) pour remonter un courant de plus en plus rapide pour tenter d'atteindre l'observateur extérieur.

Le modèle de la rivière décrit un modèle qui est radicalement différent du modèle Newtonien envisagé par Mitchell (1784) [6] et par Laplace (1799) [7].

L'image d'un espace s'écoulant comme une rivière dans un trou noir peut troubler certains par son caractère « matériel » rappelant les théories incorporant un éther. Pourtant ce caractère matériel n'est pas plus substantiel que dans l'image cosmologique familière d'un espace en expansion (voir par exemple p.237 de Greene 2004 [8]).

Visser (1998, 2003) [9],[10] , Martel & Poisson (2001) [11], ont remarqué que la métrique de Gullstrand-Painlevé avait été redécouverte de nombreuses fois [12,13,14,15,16, 17,18,19,20,21,22,23]. Etonnamment, cette forme de la métrique a été ignorée, voire méprisée dans les ouvrages de relativité générale, à l'exception du texte « Exploring Black Holes » par Taylor & Wheeler (2000) [24] qui y consacre un chapitre entier, le projet B, l'appelant « le référentiel de la pluie » (la forme de la métrique est donnée page B-13). Taylor & Wheeler attribuent (page B-26) l'idée de référentiel de la pluie au livre de Thorne, Price & MacDonald (1986) [25], p 22 et ailleurs, bien que la métrique n'apparaisse pas explicitement dans ce dernier livre. On s'est aperçu depuis quelques années que certains aspects de la relativité générale pouvaient être conceptualisés en termes de flux.

Dans le formalisme ADM (1962) [26] (voir par exemple [27] pour un exposé pédagogique), on considère des observateurs fiduciaires- FIDO's- [25] dont les lignes d'univers sont orthogonales aux hypersurfaces définies à temps constant. Le vecteur d'entraînement dans le formalisme ADM est précisément la vitesse de ces FIDO's par rapport aux coordonnées

spatiales. Alcubierre (1994) [28] a construit sa célèbre métrique « warp drive » en y introduisant un vecteur d'entraînement supralumineux (plus rapide que la lumière).

Dans un article fructueux bien que initialement passé inaperçu, Unruh (1981) [29] (voir [30] pour un exposé complet) a souligné que les équations qui régissent la propagation des ondes sonores dans un fluide dont la pression est une fonction de la densité et sans rotation sont les mêmes que celles d'un champ scalaire sans masse se propageant dans une certaine métrique de la relativité générale. Unruh a montré que ceci impliquait que les horizons sonores devraient émettre un rayonnement de Hawking de la même manière que les horizons des trous noirs, et il indiqua que cette analogie avec ces « trous muets » qui pourrait être testés en laboratoire pourrait permettre de valider l'hypothèse du rayonnement de Hawking.

Comme cela a été clairement analysé par Barcelo' et al (2005) [30], l'article de Unruh a ouvert la voie à une activité florissante traitant de la « gravitation analogique », dans laquelle un fluide qui s'écoule conformément à des champs de vitesse spécifiés simule un espace temps de la relativité générale. L'objectif premier des travaux sur la gravitation analogique est d'essayer de comprendre et d'expérimenter dans un futur pas trop éloigné la gravité quantique via son analogue sonique.

En général on considère que l'analogie avec les fluides et rivière ne s'applique qu'à une classe limitée d'espaces temps de la relativité générale, ceux qui, à un facteur « conforme » près, peuvent s'exprimer en terme de vecteur d'entraînement (la vitesse de la rivière) dans un espace de fond plat.

Le vecteur d'entraînement à trois dimensions et le facteur conforme offrent 4 degrés de liberté, alors qu'au moins 6 degrés de liberté sont requis pour spécifier un espace temps quelconque (le tenseur métrique a 10 composantes, mais seulement 6 sont indépendantes du fait de la possibilité de transformation de coordonnées sur les 4 dimensions). En corollaire, on pensait qu'une géométrie relativiste générale, pour admettre un équivalent fluide devait avoir, à un facteur conforme près, des sections spatiales euclidiennes, à temps constant, comme c'est le cas dans la forme de la métrique de Gullstrand-Painlevé. En particulier, on pensait que pour les trous noirs en rotation, il n'existait pas de modèle de la rivière [32], la géométrie de Kerr-Newman n'admettant pas de sections spatiales conformément plates [33,34].

Dans le présent article nous partons d'une image en quelque sorte différente. Nous avons remarqué que les « poissons » nageant dans la rivière de Gullstrand-Painlevé se déplaçaient conformément aux règles de la relativité restreinte, étant entraînés par les variations de vitesse du fluide de place en place.

Demandons nous s'il n'y aurait pas un phénomène analogue pour les trous noirs en rotation? De façon surprenante, comme nous le verrons au § III, la réponse est positive, de ce point de vue un modèle de la rivière pour la géométrie de Kerr Newman peut alors être envisagée. Comme escompté, c'est la forme de Doran (2000) [35] de la métrique de Kerr Newman qui se révèle être pour les trous noirs en rotation l'équivalent de celle de Gullstrand-Painlevé des trous noirs statiques.

L'étude mathématique du modèle de la rivière associé aux trous noirs de Kerr Newman montre alors que dans ce cas la rivière de Lorentz possède 6 dimensions, incluant une rotation tri dimensionnelle en plus des boosts dans les trois dimensions spatiales.

De même que la vitesse est un générateur d'une rotation entre espace et temps (boost de Lorentz), la rotation spatiale est une transformation de l'espace vers l'espace. Le poisson

nageant dans la rivière subit non seulement un entraînement mais aussi une rotation du fait des effets de marées liés aux différences de vitesse d'écoulement du fluide tout autour de lui. Ceci conduit à attribuer une signification différente à ce qu'on a appelé l'espace de fond plat dans lequel la rivière coule et tourbillonne.

C'est l'équation (71) qui va décrire mathématiquement la caractéristique essentielle du modèle de la rivière. Elle stipule que les coefficients de connexion, exprimés dans un référentiel inertiel local comobile du flot de la rivière sont égaux au gradient ordinaire (non covariant) du champ de la rivière.

Le fait que les coefficients de connexion exprimés dans la base tétradratique soient égaux à un gradient ordinaire définit ce que nous voulons dire par espace de fond plat dans le modèle de la rivière.

Cette caractéristique semble être une propriété particulière des trous noirs stationnaires. Comment cette idée émerge des mathématiques est traité au chapitre III F et revisité en III I. Soulignons bien le fait que ce que nous appelons un fond plat ne signifie pas que la métrique est spatialement euclidienne, ce qui n'est le cas que pour les trous noirs à symétrie sphérique.

Le fait que, dans un certain sens, les trous noirs stationnaires en rotation admettent un système de coordonnées plat pour le fond peut avoir des applications en relativité générale traitée numériquement, par exemple pour poser les conditions initiales d'un système contenant des trous noirs en rotation, là où les méthodes qui supposent une géométrie conformément plate sont trop restrictives pour traiter les trous noirs de Kerr. Dans cet article nous utilisons les conventions de signe et d'ordre des indices de Misner, Thorne & Wheeler [37]

II - Trous noirs sphériques

Dans ce chapitre nous considérons les trous noirs à symétrie sphérique, et justifions l'hypothèse que la forme de la métrique de Gullstrand-Painlevé, équation (1), peut être interprétée comme représentant une rivière d'espace tombant radialement vers le centre à la vitesse β .

Nous démontrons deux caractéristiques qui sont l'essence du modèle de la rivière pour les trous noirs sphériques : d'une part que la rivière d'espace peut être considérée comme se déplaçant de manière galiléenne dans un espace de fond galiléen [équations (14) et (15)] et d'autre part que lorsqu'un objet en chute libre se déplace dans le flot de la rivière d'espace, sa quadri vitesse, ou plus généralement n'importe quel quadri vecteur attaché à l'objet en chute libre peut être considéré comme subissant une suite de boosts infinitésimaux de Lorentz induits par la variation de vitesse du flot d'un endroit à un autre [équation (18)].

Comme la rivière coule à la mode galiléenne, il est possible, et à l'intérieur de l'horizon c'est le cas, de se déplacer plus vite que la lumière par rapport au flot.

Cependant les objets dans la rivière se meuvent conformément aux lois de la relativité restreinte et ne peuvent donc pas se déplacer plus vite que la lumière par rapport au flot.

A- Mathématiques du modèle de la rivière

En général, en posant $c, G = 1$, une métrique de la forme

$$ds^2 = - [1 - 2M(r)/r] dt^2 + \frac{dr^2}{[1 - 2M(r)/r]} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3)$$

peut être exprimée dans la forme de Gullstrand-Painlevé (1) avec la vitesse de chute radiale

$$\beta(r) = \left[\frac{2M(r)}{r} \right]^{1/2} \quad (4)$$

La coordonnée temps « chute libre » t_{ff} valant

$$t_{ff} = t - \int_r^{\infty} \frac{\beta}{1 - \beta^2} dr . \quad (5)$$

La vitesse β est appelée habituellement l'entraînement dans le formalisme ADM [26,27], mais ici nous l'appellerons la vitesse de la rivière. La vitesse de la rivière β est positive pour un trou noir (chute radiale) et est négative pour un trou blanc (expulsion radiale). Les horizons sont caractérisés lorsque la vitesse β est égale à la vitesse de la lumière.

$$\beta = \pm 1 , \quad (6)$$

avec $\beta = 1$ pour les horizons de trous noirs et $\beta = -1$ pour les horizons de trous blancs.

La métrique de Reissner Nordström pour un trou noir à symétrie sphérique de masse M et de charge Q prend la forme (3) avec la masse $M(r)$ intérieure à r , ce qu'on appelle la masse de Misner & Sharp (Misner & Sharp 1964 [38], Weinberg 1972, p.300 [39]), donnée par

$$M(r) = M - \frac{Q^2}{2r} . \quad (7)$$

Cependant la vitesse de la rivière β peut aussi être considérée comme étant une fonction plus générale du rayon. En II B nous nous pencherons de nouveau brièvement sur la métrique de Reissner Nordström pour voir à quoi sa rivière ressemble.

Pour rendre l'argumentation plus explicite, réécrivons la forme de Gullstrand-Painlevé (1) de la métrique en coordonnées cartésiennes $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t_{ff}, x, y, z)$ au lieu des coordonnées sphériques. Cela donne :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^\mu - \beta^\mu dt_{ff}) (dx^\nu - \beta^\nu dt_{ff}) \quad (8)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski, et

$$\beta^\mu = \beta \left(0, -\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r} \right) \quad (9)$$

sont les composantes de la vitesse radiale de la rivière.

Soit \mathbf{g}_μ les vecteurs de la base tangente dans le système de coordonnées x^μ de la forme cartésienne de Gullstrand-Painlevé. Par définition le produit scalaire des vecteurs tangents constitue la métrique $g_{\mu\nu}$.

$$\mathbf{g}_\mu \cdot \mathbf{g}_\nu = g_{\mu\nu} . \quad (10)$$

Soit $v^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ la quadri vitesse de la particule en chute libre (pas nécessairement radiale) dans la géométrie, τ étant le temps propre de la particule. En particulier les observateurs qui tombent en chute libre radiale, avec une vitesse nulle à l'infini, ont une quadri vitesse

$$v_{\text{ff}}^\mu = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3) . \quad (11)$$

De tels observateurs sont comobiles du flot de rivière d'espace.

Soit γ_m , de coordonnées locales associées $\xi^m = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, les vecteurs de base orthonormés d'une tétrade localement inertielle attachée à l'observateur en chute libre radiale depuis l'infini sans vitesse initiale. Ici et tout au long de l'article nous utiliserons des indices latins pour désigner les référentiels tétradiques (locaux), réservant les indices grecs pour les référentiels courbes (globaux) de l'espace temps. Orthonormal signifie que le produit scalaire des vecteurs de base de la tétrade satisfait à :

$$\gamma_m \cdot \gamma_n = \eta_{mn} . \quad (12)$$

Si la tétrade suit l'observateur en chute libre radiale sans précession, ceci implique que les vecteurs γ_m sont transportés parallèlement le long des lignes d'univers de cet observateur, ce qui s'écrit :

$$v_{\text{ff}}^\mu \frac{\partial \gamma_m}{\partial x^\mu} = 0 . \quad (13)$$

Supposons, sans perte de généralité, que les vecteurs γ_m de la base tétradique sont alignés avec ceux du référentiel cartésien de Gullstrand-Painlevé à l'infini. Alors la base tétradique γ_m et la base g_μ de Gullstrand-Painlevé satisfont en tout point à la relation :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= g_0 + \beta^i g_i \\ \gamma_i &= g_i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (14)$$

Qui se déduit le plus simplement des équations (10) et (12) et de considérations de symétrie, le résultat étant confirmé en vérifiant que l'équation (13) est satisfaite. Il est remarquable de noter que les relations (14) sont celles d'une transformation galiléenne, qui modifie le vecteur de base associé au temps en y ajoutant la vitesse β dans la direction du mouvement, et laisse inchangés d'une part la composante temporelle et d'autre part tous les vecteurs de base spatiaux.

La quadri vitesse u^m d'une particule en chute libre dans la base tétradique γ_m à la position de la particule se déduit de $u^m \gamma_m = v^\mu g_\mu$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} u^0 &= v^0 \\ u^i &= v^i - \beta^i v^0 \quad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned} \quad (15)$$

Physiquement la quadri vitesse u^m est la quadri vitesse relative par rapport au flot de la rivière. Par exemple, les composantes spatiales de la quadri vitesse u^i sont nulles si la particule flotte au gré des flots dans la rivière.

De nouveau les relations (15) ressemblent à celles d'une transformation galiléenne qui ne modifient que les composantes spatiales du vecteur, laissant la composante temporelle inchangée, si ce n'est que dans les équations (15) les quadri vitesses u^m et v^μ font

intervenir des dérivées par rapport au temps propre de la particule en chute libre, ce qui est relativiste (au lieu de dérivées par rapport à la coordonnée temps comme en mécanique newtonienne). Mais le temps propre est une propriété des objets se déplaçant dans la rivière, et pas de la rivière elle-même.

Les objets se déplaçant dans la rivière s’y déplacent conformément aux règles de la Relativité Restreinte. La rivière elle-même coule à la mode galiléenne dans un espace de fond galiléen.

Nous avons démontré , équations (14) et (15), la première des deux propriétés que nous avons revendiquées pour le modèle des trous noirs à symétrie sphérique, à savoir que la rivière coule à la mode galiléenne dans un espace de fond euclidien. Nous allons démontrer la deuxième revendication au sujet du modèle, à savoir que les objets se meuvent dans la rivière selon les lois de la relativité restreinte, subissant des entraînements de Lorentz liés aux effets de marée associés aux différences de vitesse du flot.

Le référentiel tétradique, ballotant au gré des flots, a été construit de sorte que l’observateur de Gullstrand-Painlevé (en chute libre radiale sans vitesse initiale à l’infini) a toujours son propre référentiel aligné avec le référentiel tétradique.

Mais en général un autre observateur en chute libre sur une autre géodésique va constater que son référentiel va se désaligner de la tétrade. Ce désalignement est déterminé mathématiquement par les équations du mouvement des objets, quadri vecteurs, représentés dans la base tétradique.

Soit un quadri vecteur

$$\underline{p} = p^m \underline{\gamma}_m = p^\mu \underline{g}_\mu$$

Ses composantes p^m dans le référentiel tétradique et ses composantes p^μ dans le référentiel global sont reliés par:

$$p^m = \delta_\mu^m p^\mu - \beta^m p^0$$

Pour un quadri vecteur en chute libre les équations du mouvement pour ses composantes p^m dans le référentiel tétradique sont (voir § III E) :

$$\frac{dp^k}{d\tau} + \Gamma_{mn}^k \omega^n p^m = 0 \tag{16}$$

où Γ_{mn}^k sont les coefficients de la connexion dans le référentiel tétradique, le pendant des symboles de Christoffel associés à une connexion métrique. Ici, pour un trou noir à symétrie sphérique, il se trouve que les coefficients non nuls de la connexion tétradique sont les gradients spatiaux de la vitesse de la rivière (voir § III H).

$$\Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{0j}^i = \frac{\partial \beta^i}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, 2, 3) . \tag{17}$$

Des équations (16) et (17) on peut déduire

$$\begin{aligned} \frac{dp^0}{d\tau} &= - \frac{\partial \beta_i}{\partial x^j} \omega^j p^i \\ \frac{dp^i}{d\tau} &= - \frac{\partial \beta^i}{\partial x^j} \omega^j p^0 \quad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned} \tag{18}$$

Les sommations sur les paires d’indices dans les équations (18) sont formellement sur les quatre indices 0, 1, 2, 3 mais en pratique cela se réduit aux sommes sur les trois indices

spatiaux 1, 2, 3 car d'abord la vitesse de chute radiale a une composante temporelle nulle, $\beta^0 = 0$, comme nous l'avons défini et ensuite la vitesse de chute libre radiale a une dérivée temporelle nulle: $\partial\beta^\mu/\partial x^0 = 0$.

Dans le contexte du modèle de la rivière les équations du mouvement (18) ont l'interprétation suivante. Dans un intervalle $\delta\tau$ de temps propre, une particule se déplace d'une distance $\delta x^i = v^i \delta\tau$ dans les coordonnées cartésiennes de Gullstrand-Painlevé et d'une distance propre $\delta\xi^i = \omega^i \delta\tau = \delta x^i - \beta^i \delta t_{\text{ff}}$ relativement au flot de la rivière.

La distance propre $\delta\xi^i$ est égale à la distance δx^i moins la distance $\beta^i \delta t_{\text{ff}}$ parcourue par la rivière. Dans les coordonnées cartésiennes de Gullstrand-Painlevé, la vitesse β^i de la rivière à la nouvelle position diffère de celle à l'ancienne position de $\delta\omega^j \partial\beta^i/\partial\omega^j$. Cependant dans le modèle de la rivière, une particule se déplaçant dans la rivière ne voit pas la totalité du changement de la vitesse de la rivière relativement aux coordonnées globales, mais uniquement celui lié aux effets de marée.

$$\delta\beta^i = \frac{\partial\beta^i}{\partial\omega^j} \delta\xi^j \quad (19)$$

dans la vitesse de la rivière relativement au référentiel localement inertiel en chute libre.

Par exemple si la particule est comobile du flot de la rivière, de sorte que $\delta\xi^i = 0$, alors la particule ne voit aucun changement du tout dans la vitesse de la rivière au cours du temps, $\delta\beta^i = 0$. Le changement infinitésimal $\delta\beta^i$ lié à l'effet de marée induit un entraînement de Lorentz du quadri vecteur p^m

$$\begin{aligned} p^0 &\rightarrow p^0 - \delta\beta_i p^i \\ p^i &\rightarrow p^i - \delta\beta^i p^0 \quad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned} \quad (20)$$

Les équations (19) et (20) reproduisent les équations du mouvement (18).

Nous avons maintenant montré la seconde propriété que nous avons revendiquée pour le modèle de la rivière des trous noirs sphériques, à savoir que quand une particule se meut dans la rivière d'espace, sa quadri vitesse, ou plus généralement tout quadri vecteur qui lui est attaché subit un boost de Lorentz consécutif aux effets de marée dans la vitesse de la rivière.

B- Métrique de Reissner- Nordström

Nous concluons ce chapitre en commentant la métrique d'un trou noir chargé sphérique de Reissner Nordström (RN) de masse M et de charge Q .

Dans ce cas la masse intérieure à r est comme l'indique l'équation (7) $M(r) = M - Q^2/(2r)$. Elle peut être interprétée comme la masse M à l'infini, moins la masse $\int_r^\infty (E^2/8\pi) 4\pi r^2 dr = Q^2/(2r)$ contenue dans le champ électrique $E = Q/r^2$ à l'extérieur de r . La géométrie RN possède un horizon externe r_+ et un horizon interne r_- .

$$r_\pm = M \pm (M^2 - Q^2)^{1/2} . \quad (21)$$

La vitesse radiale entrante atteint la vitesse de la lumière sur l'horizon externe r_+ , atteint un maximum entre l'horizon externe et l'horizon interne ralentit jusqu'à atteindre la vitesse de la lumière sur l'horizon interne r_- et continue à ralentir jusqu'à un point de rebroussement situé à

$$r_0 = \frac{Q^2}{2M} . \quad (22)$$

A ce point le flot s'inverse en accélérant vers l'extérieur traverse un autre horizon interne (appelé horizon de Cauchy) et émerge de l'horizon externe d'un trou blanc vers un autre univers.

Malheureusement la solution RN n'est pas réaliste et la possibilité d'aller vers d'autres univers plutôt compromise. La solution RN décrit la géométrie d'un univers vide entourant une charge ponctuelle. Cela correspond à une singularité répulsive de masse négative infinie contenue dans un champ électrique de masse positive infinie de sorte que le résultat donne une masse finie M à l'infini. Voir [40] pour en savoir plus sur les mystères de l'intérieur des trous noirs chargés.

La vitesse β de chute libre est imaginaire à l'intérieur du rayon r_0 de rebroussement de cette géométrie, la masse intérieure devenant négative. Ceci peut être considéré soit comme un défaut du modèle de la rivière, soit comme signalant un phénomène réputé non physique : une masse négative ! Quoi qu'il en soit le formalisme mathématique reste valide même quand la vitesse β est imaginaire.

III- Trous noirs en rotation

Le modèle de la rivière s'applique t'il aux trous noirs stationnaires en rotation ?

Comme nous le montrerons dans ce chapitre nous serons amenés à répondre par l'affirmative : Il y a une rivière d'espace et elle s'écoule dans un cadre plat et les « poissons » se déplacent dans cette rivière conformément aux lois de la RR.

Mais la rivière subit une surprenante torsion.

De l'étude des géodésiques équatoriales dans la forme de Boyer Lindquist, on pouvait s'attendre à ce que la rivière tombe en spiralant vers le trou noir comme un tourbillon, mais dans ce modèle, ce n'est pas le cas.

En fait la vitesse de la rivière ne possède aucune composante azimutale. Plutôt que de spiraler, la rivière, en plus de sa vitesse exerce une torsion en tout point.

La rivière n'est pas caractérisée par les trois nombres correspondant à son vecteur (spatial) vitesse mais par six nombres car il faut il ajouter le vecteur rotation (spatial) liée à la torsion.

Le photon-poisson subit donc non seulement un entraînement de Lorentz lié au gradient de la vitesse dans le rivière mais aussi une rotation liée au gradient des torsions dans la rivière.

L'équation (72) représentant le champ de la rivière ω_{km} est un résultat fondamental de ce chapitre. C'est un champ bivectoriel [37,41], antisymétrique dans ses indices k,m , dont la partie électrique spécifie la vitesse de la rivière et dont la partie magnétique spécifie la rotation de la rivière. Le champ de la rivière ω_{km} contient toute l'information caractérisant les propriétés d'un trou noir stationnaire en rotation.

Comment une rivière peut s'écouler et se tordre sans spiraler ? La réponse à cette énigme est que à la différence du cas de Gullstrand-Painlevé, la métrique spatiale n'est pas plate mais distordue (Figure 2).

On peut considérer la torsion dans la rivière comme source de la distorsion dans la métrique spatiale, et réciproquement on peut considérer que cette distorsion nécessite une torsion dans la rivière. Quoi qu'il en soit, la torsion et la distorsion combinent leurs effets de sorte que les référentiels inertiels se mouvant dans la rivière sont comobiles du mouvement géodésique des points au repos dans un voisinage immédiat du référentiel (Figure 4).

En relativité restreinte les transformations de Lorentz sont générées par une combinaison de variation en vitesse (boosts de Lorentz) et de rotations spatiales. Les boosts sont des rotations dans un plan défini par un axe des temps et un axe d'espace tandis que les rotations spatiales sont définies dans un plan formé de deux axes d'espace. C'est la coordonnée temps qui fait que lorsqu'il existe des gradients de la vitesse de la rivière, la métrique (4D) correspondante est non plate, alors que la métrique spatiale 3D reste plate. L'existence de gradients dans la rotation, ou torsion, rend la métrique 4D non plate du fait de la partie spatiale qui devient non plate, la partie temporelle restant elle plate, la métrique s'écrivant alors : $- dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$ où g_{ij} est le tenseur métrique 3D purement spatial.

Nous voyons que la raison pour laquelle la métrique de Gullstrand-Painlevé pour les trous noirs sphériques est plate sur les hypersurfaces à temps constant (propre d'un observateur en chute libre radiale sans vitesse initiale à l'infini) est que la rivière n'a pas de composante de torsion.

Cependant la rivière de Gullstrand-Painlevé a une composante de vitesse (variable selon la coordonnée radiale), donc la métrique de Gullstrand-Painlevé présente une courbure « temporelle ». Pour les trous noirs en rotation la rivière a, à la fois, des composantes de vitesse et de torsion (variables dans la rivière) donc la métrique est courbée spatialement et temporellement.

A- Métrique de Doran

Intéressons nous au traitement mathématique du problème. Doran (2000) [35] a souligné que la métrique de Kerr-Newman pour un trou noir en rotation de moment angulaire par unité de masse a (si $a > 0$ le trou noir tourne autour son axe vers la droite) peut s'écrire en coordonnées sphéroïdales obloïdes $(t_{\text{H}}, r, \theta, \phi_{\text{H}})$ sous la forme :

$$ds^2 = - dt_{\text{H}}^2 + \left[\frac{\rho dr}{R} + \frac{\beta R}{\rho} (dt_{\text{H}} - a \sin^2 \theta d\phi_{\text{H}}) \right]^2 + \rho^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi_{\text{H}}^2 \quad (23)$$

où $\beta(r)$ est la vitesse de la rivière,

$$R \equiv (r^2 + a^2)^{1/2}, \quad \rho \equiv (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}, \quad (24)$$

le temps chute libre t_{H} et l'angle azimutal en chute libre ϕ_{H} sont liés aux coordonnées t et ϕ de Boyer Lindquist par :

$$t_{\text{H}} = t - \int_{r_*}^{\infty} \frac{\beta dr}{1 - \beta^2} \quad (25)$$

$$\phi_{\text{H}} = \phi - a \int_{r_*}^{\infty} \frac{\beta dr}{R^2(1 - \beta^2)}. \quad (26)$$

Comme précédemment nous avons supposé que $\beta > 0$ pour un trou noir (chute entrante) et $\beta < 0$ pour un trou blanc (flux sortant). Les horizons se produisent (voir III D) quand la vitesse β de la rivière est égale à la vitesse de la lumière.

$$\beta = \pm 1 \quad (27)$$

Avec $\beta = 1$ pour les horizon des trous noirs et $\beta = -1$ pour les horizons des trous blancs. Les ergosurfaces (limites des ergosphères) se produisent là où $ds^2 = 0$ à $dr = d\theta = d\phi_{\text{H}} = 0$, ce qui se produit pour :

$$\beta = \pm \frac{\rho}{R} \quad (28)$$

avec $\beta = \rho/R$ pour les ergosphères de trous noirs et $\beta = -\rho/R$ pour les ergosphères de trous blancs. Pour un trou noir de Kerr- Newman de masse M et de charge Q , la vitesse de la rivière β est:

$$\beta(r) = \frac{(2Mr - Q^2)^{1/2}}{R} \quad (29)$$

mais pour le propos qui nous concerne la vitesse de la rivière peut être considérée comme une fonction plus générale de la coordonnée r . Remarquons que la vitesse de la rivière β définie ici diffère de celle définie par Doran [35] par un facteur ρ/R . La vitesse définie par Doran est la longueur $(\beta_{\mu}\beta^{\mu})^{1/2} = \beta R/\rho$ du vecteur vitesse β^{μ} donné par l'équation (31) ci dessous, un choix apparemment naturel. Ici nous avons fait en sorte que $\beta(r)$ soit une fonction de r seulement ne dépendant pas de θ via $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. De plus, avec la convention que nous avons adopté, la vitesse de la rivière vaut ± 1 sur les horizons (équation 27), comme nous démontrerons § IIID.

Si la vitesse de la rivière β est nulle, alors la métrique (23) se réduit à une métrique d'espace plat en coordonnées sphériques obloïdes. Cependant, à la différence du cas sphérique, la métrique n'est pas plate sur les hypersurfaces à temps « chute libre » constant, $dt_{\text{ff}}=0$.

B- Métrique cartésienne de Doran

Les § III F et III I vont nous montrer que le système de coordonnées de Doran va nous fournir les coordonnées du fond plat dans lequel la rivière coule. Nous écrirons la forme de la métrique de Doran en utilisant des coordonnées de type cartésien déduite des coordonnées de type sphérique:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t_{\text{H}}, x, y, z) = (t_{\text{H}}, R \sin \theta \cos \phi_{\text{H}}, R \sin \theta \sin \phi_{\text{H}}, r \cos \theta)$$

L'axe de rotation est l'axe de la coordonnée z . La forme de la métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^{\mu} - \beta^{\mu} \alpha_{\kappa} dx^{\kappa}) (dx^{\nu} - \beta^{\nu} \alpha_{\lambda} dx^{\lambda}) . \quad (30)$$

Ici les composantes de la vitesse β^{μ} de la rivière sont:

$$\beta^{\mu} = \frac{\beta R}{\rho} \left(0, -\frac{xr}{R\rho}, -\frac{yr}{R\rho}, -\frac{zR}{r\rho} \right) \quad (31)$$

et $\alpha_{\mu} dx^{\mu} = dt_{\text{H}} - a \sin^2 \theta d\phi_{\text{H}}$ ont pour composantes :

$$\alpha_{\mu} = \left(1, \frac{ay}{R^2}, -\frac{ax}{R^2}, 0 \right) . \quad (32)$$

Le vecteur α_{μ} est relié à la quadri vitesse à l'horizon, équation (46), et nous y ferons référence en tant que vecteur azimutal, du fait que ses composantes spatiales pointent dans la direction azimutale (négative), dans la direction opposée à la rotation du trou noir. La coordonnée radiale sphéroïde r est définie implicitement en terme des coordonnées x, y, z par:

$$r^4 - r^2(\omega^2 + v^2 + z^2 - a^2) - a^2 z^2 = 0 . \quad (33)$$

C- Tétrade de la rivière

Modéliser les trous noirs, comme un flot « entrant » d'une rivière d'espace conduit naturellement à utiliser le formalisme tétradratique. Soit \mathbf{g}_μ la base de vecteurs tangents dans le système de coordonnées cartésiennes de Doran x^μ , et soit γ_m avec ses coordonnées locales associées

$\xi^m = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, un système de tétrades localement inertielles attaché aux observateurs en chute libre « radiale » depuis l'infini, sans vitesse ni moment angulaire initial. De tels observateurs en chute libre sont comobiles du flot de la rivière d'espace. Ils tombent sur des trajectoires à θ et Φ_{ff} constants, et ont des quadri vitesses $v^\mu_{ff} = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3)$ dans le système de coordonnées cartésien de Doran. La métrique $g_{\mu\nu}$ est constituée par le produit scalaire des vecteurs tangents \mathbf{g}_μ en chaque point, équation (10) tandis que le produit scalaire des vecteurs de base de la tétrade γ_m donne la métrique de Minkowski, équation (12).

Supposons, sans perte de généralité, que les vecteurs γ_m de la base tétradratique sont alignés avec \mathbf{g}_μ , ceux du référentiel cartésien de Doran à l'infini. Alors la base tétradratique γ_m et la base \mathbf{g}_μ de Doran satisfont, comme Doran l'a remarqué (2000) [35], en tout point à la relation:

$$\begin{aligned} \gamma_{t\#} &= \mathbf{g}_{t\#} + \beta^z \mathbf{g}_z \\ \gamma_x &= \mathbf{g}_x + \alpha_x \beta^z \mathbf{g}_z \\ \gamma_y &= \mathbf{g}_y + \alpha_y \beta^z \mathbf{g}_z \\ \gamma_z &= \mathbf{g}_z \end{aligned} \quad (34)$$

Ceci peut se vérifier en constatant que le produit scalaire des γ_m ainsi construit donne la métrique de Minkowski et que leurs dérivées s'annulent le long des lignes d'univers des observateurs en chute libre sans vitesse initiale à l'infini, $v^\mu_{ff} \partial \gamma_m / \partial x^\mu = 0$.

Utilisons une notation imagée évidente pour les axes γ_m radial et azimutal:

$$(\gamma_{\rightarrow}, \gamma_{\uparrow}) \equiv (\cos \phi_{ff} \gamma_x + \sin \phi_{ff} \gamma_y, -\sin \phi_{ff} \gamma_x + \cos \phi_{ff} \gamma_y)$$

et similairement $(\mathbf{g}_{\rightarrow}, \mathbf{g}_{\uparrow}) \equiv (\cos \phi_{ff} \mathbf{g}_x + \sin \phi_{ff} \mathbf{g}_y, -\sin \phi_{ff} \mathbf{g}_x + \cos \phi_{ff} \mathbf{g}_y)$, alors

$$\begin{aligned} \gamma_{\rightarrow} &= \mathbf{g}_{\rightarrow} \\ \gamma_{\uparrow} &= \mathbf{g}_{\uparrow} - \frac{a \sin \theta}{R} \beta^z \mathbf{g}_z . \end{aligned} \quad (35)$$

Les équations (34,35) montrent que l'axe des temps γ_{\uparrow} est entraîné par la vitesse $\beta^i g_i$ comme dans le cas sphérique, éq.(14), mais de plus l'axe azimutal γ_{\uparrow} est entraîné par

$$-(a \sin \theta / R) \beta^z \mathbf{g}_z .$$

La figure 2 représente les axes horizontaux (radiaux) et azimutaux en différents points du plan équatorial d'un trou noir de Kerr. Les axes azimutaux γ_{\uparrow} sont inclinés radialement, conformément à l'équation (35), ceci reflétant le caractère anisotropique de la métrique spatiale. Les équations (34) peuvent être compactées en $\gamma_m = e_m^\mu \mathbf{g}_\mu$, où e_m^μ est la tétrade

$$e_m^\mu = \delta_m^\mu + \alpha_m \beta^\mu \quad (36)$$

avec δ_m^μ , symbole de Kronecker bien connu. La tétrade inverse s'écrit :

$$e^m_\mu = \delta_\mu^m - \alpha_\mu \beta^m . \quad (37)$$

Rappelons que le produit de la tétrade par la tétrade inverse données par les équations (36,37) est la matrice unitaire, $e_m^\mu e^m_\nu = \delta_\nu^\mu$ et $e^m_\mu e_m^\nu = \delta_\mu^\nu$, ceci résulte de l'orthogonalité des vecteurs azimutaux α_μ et vitesse β^μ , qui s'écrit $\alpha_\mu \beta^\mu = 0$. Les vecteurs α_m avec un indice latin dans la tétrade (36) et β^m , avec un indice latin dans la tétrade inverse (37) sont définis par:

$$\alpha_m \equiv \delta_m^\mu \alpha_\mu , \quad \beta^m \equiv \delta_\mu^m \beta^\mu \quad (38)$$

Ils se transforment avec le référentiel tétradratique γ_m plutôt que avec dans le référentiel des coordonnées g_μ .

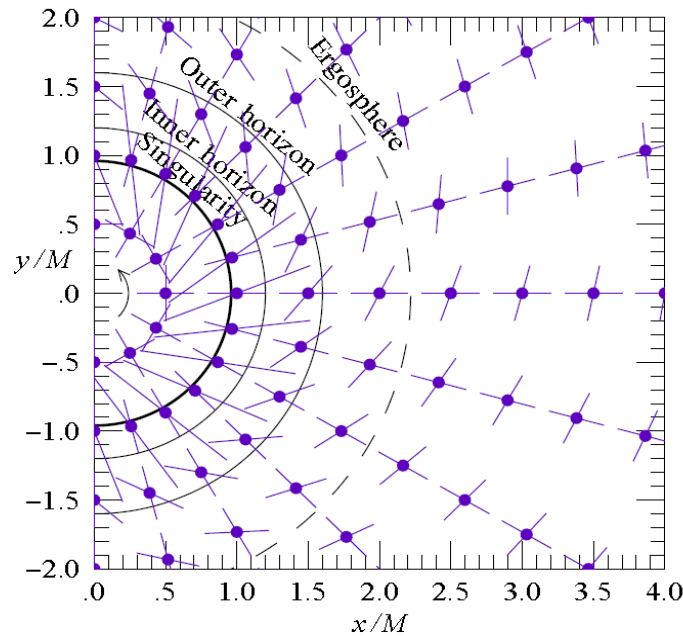


Figure 2: Ensemble d'axes tétradratiques radiaux et azimutaux $\gamma \rightarrow$ et $\gamma \uparrow$, équation (35), dans le plan équatorial x, y ($\theta = \pi/2$) d'un trou noir de Kerr (non chargé) de moment angulaire par unité de masse $a = 0.96$ tracé en coordonnées cartésiennes de Doran. L'axe azimutal est incliné radialement en chaque point, reflétant le fait que la métrique spatiale est anisotrope.

Les coordonnées de α_m et β^m sont les mêmes que celles de α_μ et β^μ dans le référentiel tétradratique particulier et le système de coordonnées que nous utilisons, mais elles seraient différentes dans un référentiel tétradratique différent ou un système de coordonnées différent.

En général les tétrades e_m^μ et leurs inverses e^m_μ permettent de transformer les composantes p_μ et p^μ de n'importe quel quadri vecteur entre le référentiel de coordonnées globales et le référentiel de la tétrade.

$$p_m = e_m^\mu p_\mu , \quad p^m = e^m_\mu p^\mu . \quad (39)$$

Les indices sur les vecteurs p_m et p^m dans le référentiel tétradique sont élevés et abaissés en utilisant la métrique de Minkowski η_{mn} tandis que les indices sur les vecteurs p_μ et p^μ , dans le référentiel de coordonnées globales sont élevés et abaissés avec la métrique $g_{\mu\nu}$.

La relation:

$$\alpha_m = e_m^\mu \alpha_\mu, \quad \beta^m = e^m_\mu \beta^\mu \quad (40)$$

est un cas particulier des équations (39) qui se réduit aux définitions supposées de (38) du fait de l'orthogonalité de α_μ et β^μ . Si le système de coordonnées ou le référentiel tétradique change, alors la tétrade change en conséquence, et α_μ et β^μ changent conformément aux équations (40).

Les composantes u^m de la quadri vitesse d'une particule dans le référentiel tétradique sont liées aux composantes v^μ dans le référentiel de coordonnées globales par $u^m = e^m_\mu v^\mu$ soit explicitement :

$$\begin{aligned} u^0 &= v^0 \\ u^i &= v^i - \beta^i \alpha_\mu v^\mu \quad (i = 1, 2, 3) . \end{aligned} \quad (41)$$

Les équations (41) signifient que si dans un intervalle de temps propre $\delta\tau$ la particule parcourt dans le système de coordonnées globales une distance $\delta x^\mu = v^\mu \delta\tau$, dans le référentiel tétradique, c'est à dire par rapport au référentiel localement inertiel d'un observateur comobile du flot entrant de la rivière, la particule parcourt une distance propre:

$$\delta \xi^m = e^m_\mu \delta x^\mu = \delta x^m - \beta^m \alpha_\mu \delta x^\mu . \quad (42)$$

On voit que le membre de droite de l'équation (42) a la même forme que le facteur de la métrique cartésienne de Doran (30). Le déplacement temporel $\delta \xi^0$ de la particule dans le référentiel tétradique est la variation galiléenne du temps $\delta t_{\mathcal{H}}$ comme dans le cas sphérique. Mais le déplacement propre spatial $\delta \xi^i$ de la particule dans le référentiel tétradique diffère du déplacement δx^i dans le système de coordonnées globales non pas par la distance $\beta^i \delta t_{\mathcal{H}}$ que la rivière a parcourue pendant le temps $\delta t_{\mathcal{H}}$, mais par $\beta^i \alpha_\mu \delta x^\mu = \beta^i (\delta t_{\mathcal{H}} - a \sin^2 \theta \delta \phi_{\mathcal{H}})$. La partie supplémentaire $-\beta^i a \sin^2 \theta \delta \phi_{\mathcal{H}}$ est due au fait que la métrique est anisotrope, comme cela est illustré sur la figure 2 .

D- Horizons

Il est maintenant possible de voir pourquoi la position des horizons correspond à $\beta = \pm 1$, comme nous l'avons affirmé précédemment, équation (27). Du paragraphe précédent nous déduisons que la vitesse effective de la rivière, du point de vue d'un objet dans la rivière, dépend de l'état du mouvement de cet objet.

La vitesse effective de la rivière est $\beta^i \alpha_\mu dx^\mu / dt_{\mathcal{H}}$.

Elle diffère de β^i d'un facteur $\alpha_\mu v^\mu / v^0 = \alpha_\mu dx^\mu / dt_{\mathcal{H}} = 1 - a \sin^2 \theta d\phi_{\mathcal{H}} / dt_{\mathcal{H}}$. Malgré ce facteur, la vitesse a une orientation toujours radiale (à θ et $\Phi_{\mathcal{H}}$ constants) vers les r décroissants dans la même direction que β_i . Si nous considérons temporairement seulement les objets ayant une valeur donnée de $\alpha_\mu v^\mu / v^0$, alors de tels objets peuvent échapper à l'attraction du trou noir seulement si leur vitesse radiale:

$$v^r = \frac{\partial r}{\partial x^\mu} v^\mu \quad (43)$$

est supérieure à zéro.

Pour déterminer la position de l'horizon nous devons d'abord résoudre le problème légèrement plus général de maximisation de la vitesse radiale v^r , en tenant compte des contraintes sur v^0 (que nous pouvons poser égale à 1 sans perte de généralité), $\alpha_\mu v^\mu$, et $v_\mu v^\mu$, la dernière contrainte venant du fait que la quadri vitesse doit être de type temps ou lumière, ce qui implique $v_\mu v^\mu \leq 0$. Autrement dit nous devons minimiser $v_\mu v^\mu$, sous les contraintes de v^0 , $\alpha_\mu v^\mu$ et v^r . Ceci implique que la quadri vitesse doit satisfaire:

$$v_\mu = \lambda \delta_\mu^0 + \mu \alpha_\mu + \nu \frac{\partial r}{\partial x^\mu} \quad (44)$$

où λ , μ , ν sont les multiplicateurs de Lagrange, dont les valeurs sont déterminées en fixant trois quelconques des quatre quantités v^0 , v^r , $\alpha_\mu v^\mu$ et $v_\mu v^\mu$.

Il n'est pas surprenant que la valeur la plus grande de v^r à v^0 et $\alpha_\mu v^\mu$ fixés se produise quand la quadri vitesse est de type lumière $v_\mu v^\mu = 0$. En éliminant les multiplicateurs de Lagrange λ , μ , ν en supposant $v^0 = 1$, $v^r = 0$, et $v_\mu v^\mu = 0$, on obtient:

$$\frac{\alpha_\mu v^\mu}{v^0} = \frac{\rho^2 [R \pm a \sin \theta (1 - \beta^2)^{1/2}]}{R(\rho^2 + \beta^2 a^2 \sin^2 \theta)} \quad (45)$$

qui a des solutions réelles à condition que $\beta^2 \leq 1$, avec $\alpha_\mu v^\mu / v^0 = \rho^2 / R^2$ à $\beta^2 = 1$. La position de l'horizon correspond bien à $\beta^2 = 1$, comme revendiqué : Si $\beta^2 < 1$, il y a des géodésiques sur lesquelles les particules peuvent s'échapper $v^r > 0$, si $\beta^2 > 1$, alors toutes les géodésiques sont piégées et un objet est voué à la chute inéluctable dans le trou noir (ou à l'expulsion dans le cas d'un trou blanc).

La quadri vitesse d'un photon en équilibre sur l'horizon, photon qui appartient à la congruence principale nulle sortante satisfait à $v_\mu = (\rho^2 / R^2) \partial r / \partial x^\mu$, et s'écrit :

$$v^\mu = \left(1, -\frac{ay}{R^2}, \frac{ax}{R^2}, 0 \right) . \quad (46)$$

Remarquons que les composantes contravariantes v^μ de cette quadri vitesse, coïncident au signe près avec les composantes covariantes du vecteur azimutal, équation (32). L'horizon tourne vers la droite par rapport au référentiel de la rivière avec une vitesse angulaire égale à:

$$\frac{d\phi_H}{dt_H} = \frac{a}{R^2} \quad (47)$$

qui est également la vitesse angulaire de l'horizon tel que perçu par un observateur à l'infini

E- Equations du mouvement dans le formalisme tétradique

Ce chapitre a pour but d'établir les équations du mouvement, relatif par rapport au flot entrant de la rivière, des objets.

Par souci pédagogique et pour être clair, nous partirons des principes de base pour établir les équations du mouvement (61) de quadri vecteurs dans le référentiel tétradique. Une fois les équations du mouvement (61) établies nous en donnerons la signification physique. Dans le chapitre suivant, § III F, nous appliquerons ces équations au cas particulier du trou noir, dont les tétrades sont données par l'équation (36).

Soit \mathbf{p} un quadri vecteur arbitraire. Le vecteur $\mathbf{p} = p^m \gamma_m = p^\mu \mathbf{g}_\mu$ est un objet invariant, indépendant du choix des de la base tétradratique ou du système de coordonnées. Conformément au principe d'équivalence, un quadri vecteur \mathbf{p} non accéléré reste au repos dans son référentiel « chute libre », ceci se traduisant par le fait que ses dérivées par rapport à son temps propre τ sont nulles dans son propre référentiel.

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0 . \quad (48)$$

Si le quadri vecteur \mathbf{p} est accéléré dans son référentiel propre (du fait d'une interaction avec un champ électromagnétique où par réaction par exemple), alors le membre de droite de l'équation (48) n'est plus nul et doit être remplacé par le quadri vecteur accélération approprié. Nous ne considérerons que le cas d'accélération nulle, une accélération pouvant être ajoutée si on le souhaite à la fin du calcul. Comme \mathbf{p} est invariant, l'équation (48) doit être vérifiée dans tous les systèmes de coordonnées. Dans le référentiel tétradratique cela implique:

$$\gamma_m \frac{dp^m}{d\tau} + \frac{d\gamma_m}{d\tau} p^m = 0 . \quad (49)$$

La dérivée par rapport au temps propre $d/d\tau$ peut s'écrire:

$$\frac{d}{d\tau} = v^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = v^\alpha e_\alpha^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = v^\alpha \partial_\alpha \quad (50)$$

où la dérivée directionnelle ∂_n est définie par:

$$\partial_n \equiv e_n^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} . \quad (51)$$

La dérivée ∂_n définie par l'équation (51) est indépendante de du choix des coordonnées x^ν , comme suggéré par l'absence d'indices grecs. La dérivée peut s'écrire $\partial_n = \gamma_n \cdot \partial$ où $\partial \equiv \mathbf{g}^\nu \partial / \partial x^\nu$ et $\mathbf{g}^\nu \equiv g^{\nu\mu} \mathbf{g}_\mu$, ce qui montre que ∂_n est une dérivée directionnelle le long de γ_n , le produit scalaire du vecteur γ_n avec le vecteur dérivée $\partial \equiv \mathbf{g}^\nu \partial / \partial x^\nu$, un objet indépendant des coordonnées. Autrement dit, ∂_n représente les composantes tétradiques d'un quadri vecteur invariant $\partial = \gamma^\alpha \partial_\alpha = \mathbf{g}^\nu \partial / \partial x^\nu$. Contrairement aux dérivées partielles $\partial / \partial x^\nu$ les dérivées directionnelles ne commutent pas. En termes de dérivées tétradiques définies par:

$$d_{\lambda\mu\nu\alpha} \equiv \eta_{\lambda\mu} e^\lambda_\nu e_\alpha^\nu \frac{\partial e_m^\lambda}{\partial x^\nu} \quad (52)$$

le commutateur $[\partial_\lambda, \partial_\mu]$ de deux dérivées directionnelles est:

$$[\partial_\lambda, \partial_\mu] = f_{\lambda\mu}{}^\alpha \partial_\alpha , \quad f_{\lambda\mu\alpha} \equiv d_{\lambda\mu\alpha} - d_{\mu\lambda\alpha} . \quad (53)$$

Les $f_{\lambda\mu\alpha}$ sont les coefficients de structure du commutateur de dérivées directionnelles.

Introduisons les coefficients de connexion tétradiques $\Gamma_{m\nu}^\lambda$ aussi appelés coefficients de rotation de Ricci, définis par:

$$\partial_\nu \gamma_m \equiv \Gamma_{m\nu}^\lambda \gamma_\lambda . \quad (54)$$

En termes de tétrade e_m^μ et de vecteurs de base g_μ , les coefficients de connexion tétradiques, avec tous leurs indices abaissés $\Gamma_{kmn} \equiv \eta_{kl} \Gamma_{mnl}$, déduits de l'équation (54), sont:

$$\Gamma_{kmn} = \gamma_{kl} \cdot \partial_n \gamma_m = e_l^\kappa g_\kappa \cdot e_n^\nu \frac{\partial(e_m^\mu g_\mu)}{\partial x^\nu} . \quad (55)$$

Les symboles de Christoffel (coefficients de connexion usuels) $\Gamma_{\kappa\mu\nu} \equiv g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sont définis par:

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_\kappa . \quad (56)$$

Les équations (55,56) impliquent que les coefficients de connexion tétradiques Γ_{kmn} sont en relation avec les symboles de Christoffel $\Gamma_{\kappa\mu\nu}$ par:

$$\Gamma_{kmn} = d_{kmn} + e_l^\kappa e_m^\mu e_n^\nu \Gamma_{\kappa\mu\nu} . \quad (57)$$

La définition (54) et le fait que $\partial_n(\gamma_k \cdot \gamma_m) = \partial_n \eta_{km} = 0$ implique que les coefficients de connexion tétradiques Γ_{kmn} sont antisymétriques sur leurs deux premiers indices .

$$\Gamma_{kmn} = -\Gamma_{mln} . \quad (58)$$

Les vecteurs tangents g_μ peuvent être considérés comme les dérivées par rapport aux coordonnées du quadri vecteur « intervalle » invariant $dx \equiv g_\mu dx^\mu$, soit $g_\mu = \partial x / \partial x^\mu$, et la commutativité des dérivées partielles, $\partial g_\mu / \partial x^\nu = \partial^2 x / \partial x^\nu \partial x^\mu = \partial^2 x / \partial x^\mu \partial x^\nu = \partial g_\nu / \partial x^\mu$ implique que les symboles de Christoffel sont symétriques dans leurs deux derniers indices,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \Gamma_{\nu\mu}^\kappa \quad (59)$$

ce qui est impliqué par la condition de torsion nulle supposée en la Relativité Générale. En combinant l'équation (57) avec l'antisymétrie de la relation (58) et la condition de non torsion (59) on obtient une expression pour les coefficients de connexion tétradiques entièrement en termes de dérivées des tétrades d_{kmn} .

$$\Gamma_{kmn} = \frac{1}{2} (d_{kmn} - d_{mln} + d_{nml} - d_{nlm} + d_{mnl} - d_{lkm}) \quad (60)$$

On déduit des équations (49,50 et 54) que les équations du mouvement pour les composantes tétradiques p^k d'un quadri vecteur non accéléré $p = p^k \gamma_k$ sont:

$$\frac{dp^{ka}}{d\tau} + \Gamma_{mna}^k v^m p^n = 0 . \quad (61)$$

Les équations du mouvement (61) ont la signification physique suivante.

La base tétradique γ_m définit un ensemble de référentiels inertiels dans l'espace temps. Dans notre cas, nous avons construit ces référentiels inertiels de sorte qu'un observateur en chute

libre depuis l'infini sans vitesse initiale ait en permanence son propre référentiel aligné avec le référentiel tétradique.

Mais en général, le référentiel d'un autre observateur qui tombe en chute libre sur une autre géodésique, va dévier du référentiel tétradique.

L'équation (61) définit cette divergence entre les référentiels inertiels locaux.

Comme cette différence est entre référentiels locaux inertiels, ils sont liés par une transformation de Lorentz. Cette transformation de Lorentz est encodée dans les connexions Γ^k_{mn} .

En particulier, si un quadri vecteur p^k est déplacé en chute libre d'une distance infinitésimale $\delta\xi^n = u^n \delta\tau$ dans le référentiel tétradique de base γ_n , alors le quadri vecteur subit une transformation de Lorentz infinitésimale $p^{ia} \rightarrow p^{ia} - \delta\xi^{na} \Gamma^ia_{mn} p^m$.

Autrement dit le coefficient de connexion Γ^k_{mn} est le générateur d'une transformation de Lorentz pour chaque index final n .

L'antisymétrie des coefficients de connexion tétradiques par rapport à leurs deux premiers indices, équation (58) exprime mathématiquement le fait que Γ^k_{mn} pour chaque n donné est le générateur d'une transformation de Lorentz.

Les composantes de Γ^k_{mn} , dans lequel un des deux premiers indices k ou m vaut zéro (temps), génèrent des boosts de Lorentz. Les composantes de Γ^k_{mn} , dont les deux premiers indices k et m sont 1,2 ou 3 (espace), génèrent des rotations spatiales.

F- L'espace de fond plat

Dans le chapitre précédent nous avons établi les équations du mouvement dans le formalisme tétradique, dans le cas général. Nous allons maintenant l'appliquer au cas particulier des trous noirs en rotation, dont les tétrades sont données par l'équation (36).

Dans ce chapitre nous montrons comment le système de coordonnées cartésiennes de Doran se comporte comme un système de coordonnées d'un espace plat. Dans le chapitre suivant III G nous verrons que les coefficients de connexion peuvent s'exprimer sous forme d'un gradient d'espace plat du champ de la rivière. Au chapitre III I nous reviendrons sur la notion d'espace de fond plat et sur sa signification. Le calcul explicite des coefficients de connexion, équation (60), à partir des tétrades de l'équation (36) nous montre que la pléiade de termes non linéaires s'annule de façon remarquable (pas seulement du fait de l'identité de Jacobi) ne laissant que des termes linéaires dans les tétrades e_m^λ . Autrement dit, dans l'équation (60) les facteurs $e^\lambda_\lambda e^\nu_n$ des termes d_{kmn} de l'équation (52) sont remplacés par les symboles de Kronecker $\delta^\lambda_\lambda \delta^\nu_n$.

$$d_{kmn} \rightarrow \eta_{ab} \delta^\lambda_\lambda \delta^\nu_n \frac{\partial e_m^\lambda}{\partial x^\nu} = \delta^\nu_n \frac{\partial e_m^\lambda}{\partial x^\nu} . \quad (62)$$

Le fait que la dérivée $e_n^\nu \partial / \partial x^\nu$ dans l'équation (52) soit remplacée par $\delta_n^\nu \partial / \partial x^\nu$ nous incite à introduire un nouvel ensemble de coordonnées d'espace plat x^n , avec des indices latins, ayant par définition la propriété que dans le système particulier et la base tétradique particulière que nous utilisons.

$$\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{n}}} \equiv \delta^{\tilde{\nu}}_{\tilde{n}} \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{\nu}}} . \quad (63)$$

La relation invariante $dx^{\tilde{n}} \partial / \partial x^{\tilde{n}} = dx^\nu \partial / \partial x^\nu$ implique alors que les différentielles d'espace plat $dx^{\tilde{n}}$ sont liées aux différentielles des coordonnées dx^ν par:

$$dx^{\tilde{n}} = \delta^{\tilde{\nu}}_{\tilde{n}} dx^\nu . \quad (64)$$

Insistons bien sur le fait que les relations (63) et (64) ne sont valables que dans le système de coordonnées particulier et dans la base tétradratique particulière que nous utilisons. Si nous appliquons une transformation locale de jauge au référentiel tétradratique (par exemple, une transformation de Lorentz qui varierait selon l'endroit) qui ferait tourner les coordonnées localement inertielles selon $\zeta^n \rightarrow \zeta'^n$, et si on applique au système de coordonnées globales une transformation $x^\nu \rightarrow x'^\nu$, alors les symboles de Kronecker des équations (63) et (64) doivent être remplacés par:

$$\delta_{\tau\epsilon}^\nu \rightarrow \delta_{\tau\epsilon}^\mu \frac{\partial \zeta'^m}{\partial \zeta'^{\tau\epsilon}} \frac{\partial \omega'^\nu}{\partial \omega^\mu}, \quad \delta_{\nu}^{\tau\epsilon} \rightarrow \delta_{\mu}^m \frac{\partial \zeta'^{\tau\epsilon}}{\partial \zeta'^m} \frac{\partial \omega^\mu}{\partial \omega'^\nu}. \quad (65)$$

Dans le système de coordonnées particulier que nous utilisons (global et tétradratique), l'intégration générale de la relation (64) dans l'espace, (on a posé la constante d'intégration à zéro, sans perte de généralité), donne:

$$\omega^{\tau\epsilon} = \delta_{\nu}^{\tau\epsilon} \omega^\nu. \quad (66)$$

Ne nous laissons pas abuser par la notation indicielle, en fait, ni x^n ni x^ν ne sont des quadri vecteurs, ils ne sont pas invariants par des transformations de jauge locales de la tétrade ou par des transformations générales des coordonnées globales (seules les différentielles dx^n et dx^ν sont des quadri vecteurs), donc l'équation (66) ne doit pas être interprétée comme une relation covariante reliant les coordonnées x^n aux coordonnées x^ν , même si le symbole de Kronecker est remplacé conformément à (65).

Insistons encore sur le fait que l'équation (66) n'est valide que dans le système particulier de coordonnées (globales et locales) que nous avons choisi.

On peut interpréter l'équation (66) comme définissant les coordonnées d'espace plat x^n : Elles ont numériquement la même valeur que les coordonnées globales courbes x^ν de la métrique cartésienne de Doran, mais transposées dans le cadre d'un espace plat de métrique Minkowskienne.

Les coordonnées de Doran [35] présentent donc la particularité de pouvoir être utilisées comme coordonnées d'un espace de fond plat dans lequel la rivière d'espace coule, dans les trous noirs en rotation.

Les coordonnées d'espace temps plat x^n ne sont pas les mêmes que les coordonnées localement inertielles ζ^n associées à la base tétradratique γ_n en chaque point de l'espace temps. Les différentielles localement inertielles $d\zeta^n$ sont liées aux différentielles des coordonnées dx^ν par:

$$d\zeta^{\tau\epsilon} = e^{\tau\epsilon}_\nu dx^\nu \quad (67)$$

qui diffèrent de la relation correspondante (64) entre dx^n et dx^ν .

G- Le champ de la rivière

Les vecteurs α_m et β^m peuvent être interprétés comme des fonctions des coordonnées d'espace plat x^n , et en utilisant cette propriété l'équation (62) devient :

$$d_{\mu m \tau\epsilon} \rightarrow \frac{\partial \alpha_m \beta_{\tau\epsilon}}{\partial \omega^\mu}. \quad (68)$$

Les coefficients de connexion, équation (60) sont alors donnés par les dérivées d'espace plat de α_m et β_m :

$$\Gamma_{kmn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_m \beta_n}{\partial x^k} - \frac{\partial \alpha_n \beta_m}{\partial x^k} + \frac{\partial \alpha_m \beta_n}{\partial x^l} - \frac{\partial \alpha_n \beta_m}{\partial x^l} + \frac{\partial \alpha_n \beta_m}{\partial x^l} - \frac{\partial \alpha_l \beta_n}{\partial x^m} \right) . \quad (69)$$

Les coefficients de connexion avec le dernier indice égal à zéro, $n = 0$, sont tous identiquement nuls, $\Gamma_{km0} = 0$ et en prenant le rotationnel spatial de Γ_{kmn} sur l'index n cela produit une autre pléiade de termes qui s'annulent également.

$$\epsilon^{ijn} \frac{\partial \Gamma_{kmn}}{\partial x^j} = 0 \quad (70)$$

pour tous les i, k, m . Ceci montre que les coefficients de connexion Γ_{kmn} peuvent s'exprimer comme l'opposé du gradient spatial $\partial/\partial x^n$ d'un objet ω_{km} , que nous appellerons le champ de la rivière puisque qu'il contient toutes les propriétés de la rivière, dans le modèle de la rivière :

$$\Gamma_{kmn} = -\frac{\partial \omega_{km}}{\partial x^n} . \quad (71)$$

Le champ de la rivière est un bivecteur [37,41] héritant des Γ_{kmn} , la propriété d'être antisymétrique en k, m . Le fait que ce coefficient de connexion Γ_{kmn} soit le gradient spatial plat du champ de la rivière est la clé de la description des trous noirs par le modèle de la rivière. Après quelques calculs, nous trouvons que le dit bivecteur du champ de la rivière peut s'écrire:

$$\omega_{km} = \alpha_n \beta_m - \alpha_m \beta_n + \epsilon_{0km} \zeta^i \quad (72)$$

où le vecteur ζ^i vaut:

$$\zeta^i = (0, 0, 0, \zeta) , \quad \zeta = a \int_{*}^{\infty} \frac{\beta}{R^2} \quad (73)$$

ce vecteur, orienté selon l'axe de rotation du trou noir, pointe verticalement vers le haut.

Le champ de la rivière ω_{km} donné par l'équation (72) hérite sa structure Lorentzienne du coefficient de connexion Γ_{kmn} .

Le champ de la rivière définit une vitesse et une rotation (aussi appelé torsion), en chaque point de la géométrie du trou noir.

Les composantes de ω_{km} dans lesquelles les indices k ou m valent 0 (temps) définissent une vitesse tandis que celles dont les deux indices k et m sont 1,2,3 (espace) définissent une rotation spatiale, ou torsion.

La vitesse est simplement la vitesse β_m de la rivière.

$$\omega_{0m} = \beta_m , \quad (74)$$

Tandis que l'axe et l'angle de torsion de la rivière sont donnés par le vecteur de rotation:

$$\mu^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ikm} \omega_{km} = \epsilon^{ikm} \alpha_n \beta_m + \zeta^i \quad (i, k, m = 1, 2, 3) \quad (75)$$

Comme le vecteur vitesse β_i , le vecteur de torsion μ^i est situé en chaque point dans le plan d'angle azimutal chute libre Φ_{ff} constant car il est la somme de deux vecteurs $\epsilon^{\dot{\alpha}em} \alpha_k \beta_m$ et ζ^i tous deux orthogonaux au vecteur azimutal α_k .

La figure 3 illustre les caractéristiques des champs de vitesse et de torsion β^i et μ^i d'un trou noir non chargé de moment angulaire spécifique $a = 0.96$.

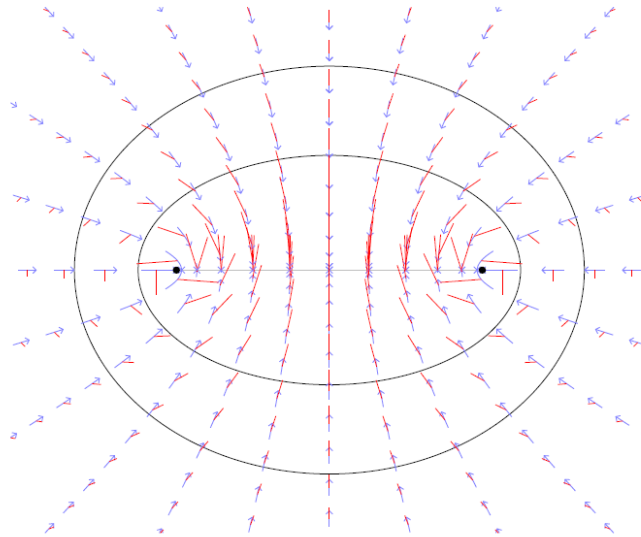


Figure 3 : Champs de vitesse et torsion pour un trou noir de Kerr (non chargé) de moment angulaire par unité de masse de 0.96.

Les lignes fléchées (bleues) montrent l'amplitude et la direction de la vitesse de la rivière, tandis que les lignes non fléchées (rouge), émergeant des lignes bleues montrent l'amplitude et l'axe de rotation de la torsion de la rivière. Les ellipses confocales, de foyers repérés par deux gros points (qui sont la coupe de la singularité en anneau), matérialisent les horizons extérieurs et intérieurs. Dans la solution dans le vide Kerr, la vitesse s'annule sur le disque horizontal contenu dans la singularité en anneau, puis rebrousse chemin retraverse en sens inverse l'horizon interne pour émerger dans un autre univers.

Un autre bivecteur bien connu est le tenseur F_{km} associé au champ électromagnétique et il peut être utile de faire l'analogie entre les deux champs. Le vecteur vitesse β_i est l'analogue du vecteur champ électrique E_i , tandis que le vecteur de torsion μ_i ressemble au vecteur champ magnétique B_i . L'analogie est poussée jusqu'au fait que comme dans un champ statique, le vecteur vitesse β_i est le gradient d'un potentiel ψ_i .

$$\beta_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \quad \psi \equiv -\int_{\infty}^{\infty} \beta dr. \quad (76)$$

Cependant, à la différence du cas d'un champ magnétique, le vecteur de torsion μ^i n'est pas un pur rotationnel, bien que curieusement $\mu^i + \zeta^i$ soit lui un pur rotationnel de divergence nulle, $\partial(\mu^i + \zeta^i)/\partial x^i = 0$.

H- Mouvement des objets dans la rivière

Nous sommes maintenant prêts à démontrer que lorsqu'un objet se déplace dans la rivière d'espace il subit à la fois un boost de Lorentz et une rotation du fait de la variation locale de

la vitesse et des tourbillons dans le flot (gradients des vitesses et des tourbillons du flot). C'est une caractéristique fondamentale du modèle de la rivière pour un trou noir stationnaire. En substituant les coefficients de connexion Γ_{kmn} de l'équation (71) dans l'équation du mouvement (61) on trouve que l'équation du mouvement (61) d'un vecteur p^k non accéléré dans le référentiel de la rivière s'écrit:

$$\frac{dp^{ia}}{d\tau} = \frac{\partial \omega^{ia}_m}{\partial \omega^{ia}} \omega^{ia} p^m . \quad (77)$$

L'équation (77) s'interprète comme suit. Dans un intervalle infinitésimal $\delta\tau$ de temps propre, une particule parcourt une distance $\delta\xi^{ia} = \omega^{ia} \delta\tau$ par rapport au flot entrant de la rivière d'espace. Ce déplacement dans la rivière va impliquer que la particule va être soumise à un nouvel état de l'effet de marée, le changement étant de:

$$\delta \omega^{ia}_m = \frac{\partial \omega^{ia}_m}{\partial \omega^{ia}} \delta \xi^{ia} \quad (78)$$

dans le champ de la rivière, ce qui généralise l'équation (19) établie pour les trous noirs sphériques. Le changement d'effet de marée $\delta \omega^{ia}_m$ dans le champ de la rivière est une transformation de Lorentz infinitésimale, et cela induit un boost de Lorentz et une rotation du quadrivecteur p^k

$$p^{ia} \rightarrow p^{ia} + \delta \omega^{ia}_m p^m . \quad (79)$$

Les équations (78) et (79) reproduisent les équations du mouvement (77) ; La figure 4 montre deux ensembles de géodésiques calculés en utilisant l'équation du mouvement (77)

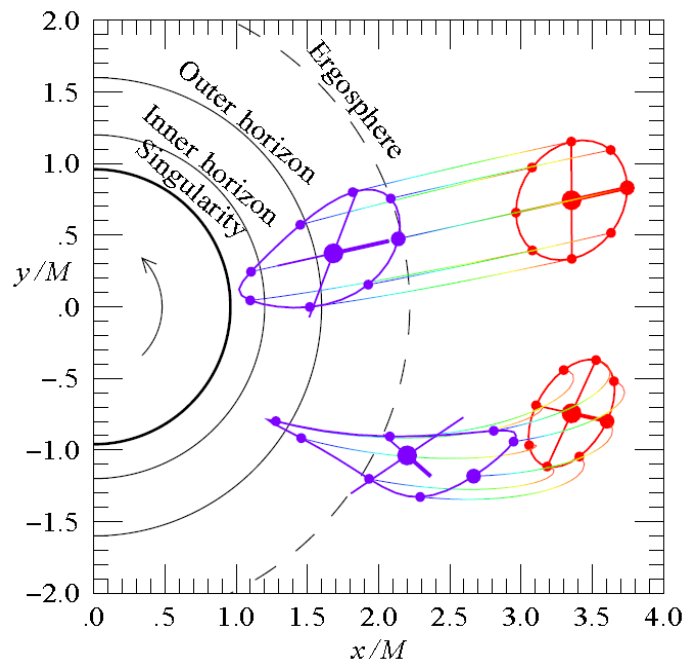


Figure 4 : Deux exemples d'un ensemble de géodésiques dans le plan équatorial x-y d'un trou noir de Kerr (non chargé) de moment angulaire par unité de masse $a = 0.96$ tracés dans les coordonnées cartésiennes de Doran, §III B. Pour chaque ensemble de géodésiques on a dessiné un point central (gros point) d'où sont issus ses axes localement inertiels (lignes épaisses en croix, centrées sur le point) entourées par un ensemble de points auxiliaires qui étaient uniformément espacés autour et initialement au repos par rapport au point central dans le référentiel localement inertielle du point

central. Le point central et les points auxiliaires suivent indépendamment des géodésiques (lignes fines) dans leur chute géodésique dans le trou noir, l'ensemble qui formait une figure très régulière au départ (particules régulièrement espacées sur un cercle centré sur une particule) se déforme au cours de la chute du fait de la structure inhomogène et anisotrope de la rivière. Dans l'ensemble supérieur de géodésiques, le point central est comobile du flot de la rivière entrante, tandis que dans l'ensemble inférieur de géodésiques, le point central, initialement animé d'une vitesse radiale sortante, va rapidement faire demi tour (sous l'action du champ) et tomber radialement vers le trou noir. L'ensemble inférieur illustre bien comment les axes localement inertiels attachés au point central se tordent quand l'ensemble se met à tomber vers le trou noir, la torsion agissant de façon à conserver la comobilité du référentiel avec le mouvement géodésique des points au voisinage immédiat du point central.

Chaque ensemble de points consiste en point central avec ses axes tétradiques associés, encerclé par un ensemble de points initialement, régulièrement espacés sur le cercle et au repos par rapport au point central, dans le référentiel localement inertielle attaché au point central. Dans l'ensemble du haut le point central est comobile du flot de la rivière entrante, tandis que dans l'ensemble du bas le point central est animé initialement d'un mouvement radial sortant, mouvement qui va bientôt s'inverser. Les axes tétradiques subissent un cisaillement du fait de la métrique spatiale qui est anisotrope (comparer avec la figure 2). Dans l'ensemble du bas les axes tétradiques subissent une contraction de Lorentz dans la direction radiale du fait du mouvement radial initialement sortant par rapport au flot de la rivière. Les ensembles de points deviennent distordus par les effets de marée en tombant vers le trou noir. Si les coordonnées localement inertielle d'un axe de base tétradique sont notées $\delta\zeta^k$ alors les axes de la base tétradique évoluent selon l'équation du mouvement (77) avec $p^k \rightarrow \delta\zeta^k$.

$$\frac{d\delta\zeta^k}{d\tau} = \frac{\partial\omega^k_m}{\partial x^r} v^r \delta\zeta^m . \quad (80)$$

De même, la quadri vitesse tétradique u^k de chaque point dans l'ensemble évolue suivant l'équation du mouvement (77) avec $p^k \rightarrow u^k$,

$$\frac{du^k}{d\tau} = \frac{\partial\omega^k_m}{\partial x^r} v^r u^m . \quad (81)$$

Chaque point entourant le point central est initialement au repos par rapport au point central dans le référentiel localement inertielle du point central. Ceci exige que la différence covariante des quadri vitesses dans la base tétradique entre chaque point et le point central s'annule initialement, ce qui implique que la différence δu^k de la quadri vitesse tétradique d'un point à une distance localement inertielle de $\delta\zeta^k$ du point central doit satisfaire, initialement, à l'ordre linéaire pour la distance $\delta\zeta^k$.

$$\delta u^k = \frac{\partial\omega^k_m}{\partial x^r} \delta\zeta^r u^m . \quad (82)$$

La différence δu^k dans l'équation (82) s'interprète comme la quadri vitesse tétradique d'un point évaluée dans le référentiel tétradique de ce point, moins la quadri vitesse tétradique du point central évaluée dans le référentiel tétradique du point central. Remarquons que les indices de $\delta\zeta^r$ et u^m dans le membre de droite de l'équation (82) sont permutés par rapport à ceux du membre de droite de l'équation (80). Dans l'équation (80) l'axe $\delta\zeta^k$ est transporté le

long de la quadri vitesse u^n , tandis que dans l'équation (82) la quadri vitesse u^k est transportée le long de l'axe $\delta\xi^n$.

L'ensemble inférieur des points de la figure 4 illustre la torsion dans le référentiel qui se développe quand l'ensemble se déplace dans la rivière d'espace. La torsion est telle qu'elle permet de maintenir la comobilité du référentiel localement inertiel avec le mouvement géodésique des points dans un voisinage immédiat du référentiel.

L'équation (82) est vérifiée initialement, quand l'ensemble de points sont en repos relatif, satisfaisant $D\delta\xi^k/D\tau = 0$. La forme la plus générale de l'équation (82), valide quand les points sont en mouvement relatif est, à l'ordre linéaire en $\delta\xi^k$ (distance infinitésimale du point périphérique au point central, ici nous inversons l'équation (71), soit avec la notation plus familière pour les connexions Γ^k_{mn}),

$$\delta u^k + \Gamma^k_{mn} \delta\xi^m u^n = \frac{D\delta\xi^k}{D\tau} \quad (83)$$

soit de façon équivalente:

$$\delta u^k = \frac{d\delta\xi^k}{d\tau} + (\Gamma^k_{rm} - \Gamma^k_{mr}) \delta\xi^r u^m . \quad (84)$$

La variation de l'équation du mouvement pour u^k donne:

$$\frac{d\delta u^k}{d\tau} + \partial_l \Gamma^k_{mn} \delta\xi^l u^m u^n + \Gamma^k_{mn} (u^r \delta u^m + u^m \delta u^r) = 0 . \quad (85)$$

En insérant l'expression (84) pour δu^k dans l'équation (85) nous obtenons l'équation bien connue de la déviation géodésique:

$$\frac{D^2 \delta\xi^k}{D\tau^2} = R_{lmn}{}^k u^m u^n \delta\xi^l \quad (86)$$

où R_{klmn} est le tenseur de courbure de Riemann:

$$R_{klmn} = \partial_l \Gamma_{rmn}{}^k - \partial_m \Gamma_{rnl}{}^k + \Gamma_{ml}^j \Gamma_{jrn}{}^k - \Gamma_{mn}^j \Gamma_{jrl}{}^k + (\Gamma_{lk}^j - \Gamma_{kl}^j) \Gamma_{rmn}{}^j . \quad (87)$$

I – L'espace de fond plat revisité

Maintenant que nous avons établi le formalisme du modèle de la rivière, il est utile de revenir sur l'espace de fond plat, dans lequel la rivière d'espace s'écoule en tourbillonnant vers un trou noir en rotation. Qu'entendons nous par « plat » dans ce contexte. C'est l'équation (71), qui stipule que le coefficient de connexion est égal au gradient spatial « plat » du champ de la rivière, qui est la clé de voûte du modèle. Le fait que le gradient est une dérivée partielle ordinaire en coordonnées cartésiennes de Doran justifie qu'on qualifie de plat l'espace de fond, dans un certain sens c'est tout ce qu'on peut en dire. L'équation (71) acquiert un sens physique car elle se prolonge dans l'équation du mouvement (77) des objets « nageant » dans la rivière. L'équation du mouvement donne une image physique des objets se déplaçant dans la rivière ballottés par son champ tumultueux et tourbillonnaire ce qui entraîne des boosts de Lorentz et des rotations, comme nous l'avons décrit.

Dire que l'espace temps de fond est plat dans le modèle de la rivière ne signifie pas que sa métrique $g_{\mu\nu}$ est plate. Les règles et horloges immergées dans la rivière d'espace ne mesurent

pas des distances et des temps dans l'espace de fond, mais plutôt des distances et des temps relativement au flot lui-même étiré et tordu par les effets de marée. La présence de ces effets de marée est la signature d'une courbure, aussi on comprend pourquoi la métrique mesurée par les règles et les horloges va être non plate.

Soulignons que l'espace de fond plat n'est pas observable. C'est une construction mathématique formelle dont le seul but est de faire émerger une structure originale et utile.

IV - Résumé

Dans cet article nous avons présenté une manière de conceptualiser les trous noirs, que nous avons appelé le modèle de la rivière.

L'objet de ce modèle est d'offrir une image intuitive des trous noirs, dont les éléments de base sont suffisamment simples pour les rendre accessibles à non spécialistes. Dans le modèle de la rivière, l'espace lui-même coule comme une rivière dans un espace temps de fond plat, tandis que les objets dans la rivière se déplacent conformément aux règles de la Relativité Restreinte. Pour un trou noir de Schwarzschild (statique, non chargé) la rivière coule radialement vers le trou noir à la vitesse Newtonienne de libération, atteignant la vitesse de la lumière à l'horizon. Sous l'horizon la rivière coule à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière, entraînant tout sur son passage. Nous avons détaillé le modèle afin de montrer qu'il était parfaitement conforme aux lois physiques et à la relativité restreinte et générale en particulier. Nous avons montré que ce modèle s'appliquait pour tout trou noir stationnaire, statique ou en rotation, chargé électriquement ou non). Le système de coordonnées cartésiennes de Doran [35] nous fournit les coordonnées de l'espace de fond plat dans lequel la rivière s'ébat.

L'extension du modèle de la rivière aux trous noirs en rotation se révèle à la fois surprenant et élégant. Contrairement à ce qu'on pouvait imaginer la rivière ne tombe pas en spiraland vers le trou noir. La composante azimutale de la vitesse de la rivière est nulle.

A la place, la rivière va présenter en chaque point une torsion en plus de la vitesse. La rivière est alors un espace temps de Lorentz caractérisé par six générateurs du groupe de Lorentz. Quand un objet se déplace dans la rivière d'espace il subit des boosts de Lorentz consécutifs aux variations de vitesse de la rivière sur son trajet et des rotations du fait des variations des tourbillons sur son chemin. L'équation (72) donne une expression explicite du champ de la rivière, c'est un champ bi vectoriel à 6 composantes qui spécifie la vitesse et la torsion de la rivière en chaque point de la géométrie du trou noir.

Les boosts et torsions de marée subis par un objet dans la rivière induisent une courbure de l'espace temps tel qui est mesuré par l'objet, ayant comme conséquence que la métrique n'est pas plate.

Les variations en vitesse de la rivière correspondent à une rotation temps- espace (boost de Lorentz), alors que les variations des tourbillons induisent des rotations espace-espace (rotations spatiales). Pour un trou noir sphérique la rivière a une torsion nulle, avec comme conséquence que les hypersurfaces spatiales (à temps constant) de la métrique de Gullstrand-Painlevé, sont plates. Pour un trou noir en rotation, la rivière a une torsion non nulle, et la métrique n'est pas plate pour les hypersurfaces spatiales.

Remerciements

Nous remercions Katharina Kohler pour une traduction écrite de la partie finale de Gullstrand (1922) [1] et Wildrose Hamilton pour avoir dessiné la figure 1. Pour cet article nous avons tiré profit des conversations et correspondances avec de nombreux collègues, en particulier, Peter Bender, James Bjordken, Robert Brandenberger, Jan Czerniawski, Nick Gnedin et Scott Pollack pour ne citer qu'eux. AJSH a bénéficié d'une aide de la part de NSF dotation ESI-0337286

Références

- * Electronic address: Andrew.Hamilton@colorado.edu; URL: <http://casa.colorado.edu/~ajsh/>
- ¹ Alfvén Gullstrand, "Allgemeine Lösung des statischen Einkörperproblems in der Einsteinschen Gravitationstheorie", *Arkiv. Mat. Astron. Fys.* **16**(8), 1–15 (1922).
 - ² Paul Painlevé, "La mécanique classique et la théorie de la relativité", *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **173**, 677–680 (1921).
 - ³ Salvatore Antoci and Dierk-Ekkehard Liebscher, "Reinstating Schwarzschild's original manifold and its singularity", *gr-qc/0406090* (2004) contains an English translation of Schwarzschild's 'Massenpunktes' (1916) paper.
 - ⁴ Tony Rothman, "Editor's Note: The Field of a Single Centre in Einstein's Theory of Gravitation, and the Motion of a Particle in That Field", *Gen. Rel. and Gravitation* **34**, 1541–1543 (2002) comments on the fact that the Schwarzschild metric was discovered independently by Johannes Droste in 1916.
 - ⁵ Tanmay Vachaspati, "Cosmic Problems for Condensed Matter Experiment", *cond-mat/0404480* (2004).
 - ⁶ John Michell, "On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, Etc., of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of their Light, in case such a Diminution Should Be Found to Take Place in Any of the Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would Be Further Necessary for That Purpose", *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **74**, 35 (1784).
 - ⁷ Pierre-Simon Laplace, "Proof of the Theorem, that the Attractive Force of a Heavenly Body Could Be So Large, that Light Could Not Flow Out of It", *Allgemeine Geographische Ephemeriden, verfasst von Einer Gesellschaft Gelehrten*. 8vo Weimer, IV, I. Bd St, ed F. X. von Zach (1799); English translation in A. Appendix of Stephen W. Hawking & George F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
 - ⁸ Brian Greene, *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality* (A. A. Knopf, New York, 2004).
 - ⁹ Matt Visser, "Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation", *Class. Quant. Grav.* **15**, 1767–1791 (1998).
 - ¹⁰ Matt Visser, "Heuristic approach to the Schwarzschild geometry", *gr-qc/0309072* (2003).
 - ¹¹ Karl Martel and Eric Poisson, "Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes", *Am. J. Phys.* **69**, 476–480 (2001).
 - ¹² W. Laschkezew, "Zure Theorie der Gravitation", *Zeitschrift für Physik*, **35**, 473–476 (1926). A translation of the abstract is: "The Einstein equivalence principle can be satisfied from the point of view of an aether theory, if one permits accelerated aether currents. All consequences of the Einstein theory of gravitation are derived in elementary way by connection of the theory of special relativity with the above hypothesis."
 - ¹³ Georges Lemaître, "L'univers en expansion", *Ann. Soc. Sci. (Bruxelles)* **A53**, 51–85 (1933).
 - ¹⁴ Andrzej Trautman, "Comparison of Newtonian and relativistic theories of space-time", in *Perspectives in geometry and relativity, essays in honor of Václav Hlavatý*, 413–425 (1966).
 - ¹⁵ Howard P. Robertson and Thomas W. Noonan, *Relativity and cosmology* (Saunders, Philadelphia, 1968).
 - ¹⁶ Frank Estabrook, Hugo Wahlquist, Steven Christensen, Bryce DeWitt, Larry Smarr, and Elaine Tsiang, "Maximally Slicing a Black Hole", *Phys. Rev. D* **7**, 2814–2817 (1973).
 - ¹⁷ Ronald Gautreau and Banesh Hoffmann, "The Schwarzschild radial coordinate as a measure of proper distance", *Phys. Rev. D* **17**, 2582–2585 (1978).
 - ¹⁸ Ronald Gautreau, "Light cones inside the Schwarzschild radius", *Am. J. Phys.* **63**, 431–439 (1995).
 - ¹⁹ Per Kraus and Frank Wilczek, "A Simple stationary line element for the Schwarzschild Geometry, and some applications", *Mod. Phys. Lett. A* **9**, 3713–3719 (1994).
 - ²⁰ Kayll Lake, "A Class of quasistationary regular line elements unpublished, *gr-qc/9407005* (1994).
 - ²¹ Anthony Lasenby, Chris Doran, and Stephen Gull, "Gravity, gauge theories and geometric algebra", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **356**, 487–532 (1998).
 - ²² Pawel Nurowski, Schucking Englebert, and Andrzej Trautman, "Relativistic gravitational fields with close Newtonian analogs", Ch. 23 of *On Einstein's path: Essays in honor of Engelbert Schucking*, ed. Alex Harvey (Springer, New York, 1999) 329–337.
 - ²³ Jan Czerniawski, "What is wrong with Schwarzschild's coordinates?", *Concepts Phys.* **3** 307–318 (2006).
 - ²⁴ Edwin F. Taylor and John A. Wheeler, *Exploring black holes: introduction to general relativity* (Addison Wesley Longman, San Francisco, 2000).
 - ²⁵ Kip S. Thorne, Richard H. Price, and Douglas A. MacDonald, *Black Holes: The Membrane Paradigm* (Yale University Press, New Haven and London, 1986).
 - ²⁶ Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, "The dynamics of general relativity" in *Gravitation, an Introduction to Current Research*, pp. 227–265 (Wiley, New York, 1962).
 - ²⁷ Luis Lehner, "Numerical relativity: a review", *Class. Quant. Grav.* **18**, R25–36 (2001).
 - ²⁸ Miguel Alcubierre, "The warp drive: hyper-fast travel within general relativity", *Class. Quant. Grav.* **11**, L73–79 (1994).
 - ²⁹ W. G. Unruh, "Experimental black hole evaporation", *Phys. Rev. D* **14**, 1351–1353 (1981).
 - ³⁰ Carlos Barceló, Stefano Liberati, and Matt Visser, "Analogue gravity", *gr-qc/0505065*.
 - ³¹ José Natário, "Initial value formulation of Newtonian gravity", *gr-qc/0408035* (2004).
 - ³² Matt Visser and Silke E. Ch. Weinfurter, "Vortex geometry for the equatorial slice of the Kerr black hole", *gr-qc/0409014* (2004).
 - ³³ Alcides Garat and Richard H. Price, "Nonexistence of conformally flat slices of the Kerr spacetime", *Phys. Rev. D* **61**, 124011 (2000).
 - ³⁴ Juan A. Valiente Kroon, "On the nonexistence of conformally flat slices in the Kerr and other stationary spacetimes", *gr-qc/0310048* (2003).
 - ³⁵ Chris Doran, "A new form of the Kerr solution", *Phys. Rev. D* **61**, 067503 (2000).
 - ³⁶ Greg B. Cook, *Living Reviews in Relativity* **2000-5** (2000).
 - ³⁷ Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, New York, 1973).
 - ³⁸ Charles W. Misner and David H. Sharp, *Phys. Rev. B* **136**, 571–576 (1964).
 - ³⁹ Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley, New York, 1972).
 - ⁴⁰ Andrew J. S. Hamilton and Scott E. Pollack, "Inside charged black holes I. Baryons", *Phys. Rev. D*, **71**, 084031 (2005); "Inside charged black holes II. Baryons plus Dark Matter", *Phys. Rev. D*, **71**, 084032 (2005).
 - ⁴¹ Stephen Gull, Anthony Lasenby, and Chris Doran, "Imaginary Numbers are not Real — the Geometric Algebra of Spacetime", *Found. Phys.* **23**, 1175–1201 (1993) <http://www.ucl.ac.uk/~ucesjph/reality/ga/intro.html>; Chris Doran, Anthon Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

Annexe A : Projet : Le modèle de la rivière de trous noirs

Le projet ci-dessous a fait l'objet d'expérimentations sur le terrain et d'aménagements consécutivement à l'expérience acquise par plusieurs années de cours d'initiation à la relativité et aux trous noirs. Ces cours étaient dispensés à des étudiants non diplômés de niveaux d'expertise différents (étudiants à dominante non scientifique et étudiants à dominante scientifique). Les sessions duraient 45 minutes, et la classe qui participait le projet était scindée en groupes de travail de 3 ou 4 étudiants, qui au terme d'une discussion contradictoire (dialectique) devaient se mettre d'accord sur une réponse commune aux questions (consensus). A la fin du projet, chaque classe devait soumettre sa réponse pour évaluation.

Questions conceptuelles

Selon le modèle de la rivière des trous noirs, les objets à proximité du trou noir se comportent comme si l'espace chutait comme une rivière dans le trou noir. Pour les trous noirs sphériques, ce modèle a été découvert en 1921 par le prix Nobel allemand Allvar Gullstrand et indépendamment par le mathématicien français Paul Painlevé. Dans ce modèle, l'espace s'écoule vers l'intérieur à la vitesse de libération Newtonienne $v = \sqrt{2GM/r}$. La vitesse de la rivière est inférieure à la vitesse de la lumière c à l'extérieur de l'horizon, égale à c sur l'horizon et est supérieure à c à l'intérieur de l'horizon. Quelles sont les réponses que prédit ce modèle pour les questions suivantes. [Il est conseillé aux néophytes de ne tenter de répondre qu'aux questions sans astérisque. Pour les étudiants plus expérimentés dans ce domaine répondre à toutes les questions en ignorant les indices donnés].

1*- Quel est le rayon de l'horizon prédit par le modèle de la rivière ?

2 - Supposons que vous chevauchiez un rayon lumineux (se déplaçant donc à la vitesse de la lumière) situé exactement sur l'horizon. Que se passe t'il si ce rayon est dirigé radialement vers l'extérieur ?

[Tombez vous dans le trou noir ? Vous échappez vous du trou noir ? Vous déplacez vous transversalement ?] Qu'arrive t'il si ce rayon est toujours dirigé vers l'extérieur, mais non radialement ?

3 - De quelle manière, le cas échéant, ce comportement diffère des prédictions de la théorie corpusculaire de la lumière qui permit à John Mitchell, en 1784, de donner le résultat correct pour le rayon de l'horizon ? [Dans la théorie corpusculaire de la lumière, un corpuscule de lumière est tiré à la vitesse de la lumière, et se comporte comme une particule massive, il se dirige vers l'infini et soit il s'échappe, soit il rebrousse chemin et retombe selon que sa vitesse initiale est supérieure (ou égale) ou inférieure à la vitesse libération.

4 - Supposons que vous soyez un rayon de lumière en orbite circulaire autour d'un trou noir. Sur cette orbite appelée la sphère des photons, êtes vous à l'horizon, à l'intérieur de l'horizon ou à l'extérieur de l'horizon ? Justifiez votre réponse.

5 - Etablissez une correspondance entre l'apparence du ciel si vous naviguez juste au dessus de l'horizon d'un trou noir, et l'effet de dilatation /compression de la relativité restreinte [Comment une scène nous apparaît elle lorsque nous nous déplaçons à une vitesse proche de celle de la lumière].

6- Que prédit qualitativement le modèle de la rivière pour les forces de marée subies par un observateur en chute libre ? [D'abord la force de marée dans la direction radiale. Tenez compte du fait que la rivière accélère en coulant vers le trou noir. Ensuite, la force de marée dans la direction transversale. Tenez compte du fait que la rivière « converge » (se rétrécit) en coulant vers le trou noir.]

*7 - Comment le modèle rend compte du rougissement et du gel à l'approche de l'horizon ?

*8 - Sachant qu'une des hypothèses fondamentales de la Relativité restreinte et générale est que l'espace temps n'a pas d'existence absolue, que veut on dire lorsqu'on stipule que l'espace tombe dans un trou noir ?

*9 - Dans le modèle de la rivière, le flot d'espace accélère en direction du trou noir. Si la rivière se déplaçait uniformément au lieu d'accélérer, pourrait t'on en déduire que toute forme de gravitation est absente ?

Réponses

1- La vitesse de la rivière est égale à la vitesse de lumière quand $(2GM/r_s)^{1/2} = c$. On peut en tirer le rayon de Schwarzschild r_s .

$$r_s = 2GM/c^2$$

2- Si on chevauche un rayon lumineux, pointé radialement vers l'extérieur, sur l'horizon on reste suspendu ad vitam eternam : La vitesse du photon compensant exactement la vitesse en sens contraire de la rivière. Si le photon ne pointe pas radialement vers l'extérieur, sa composante radiale est inférieure à la vitesse de la lumière. Le flot entrant va alors vous emporter vers la singularité centrale.

3- Tandis qu'en Relativité Générale un rayon lumineux pointé radialement vers l'extérieur reste au repos pour toujours, dans la théorie corpusculaire classique de la lumière, la lumière n'est jamais au repos. La lumière s'échappe à l'infini si sa vitesse est égale ou supérieure à la vitesse de libération ou atteint un maximum et rebrousse chemin si sa vitesse est inférieure à la vitesse de libération. Le seul moment où la vitesse est nulle, c'est au moment, de durée nulle, du demi tour, en tout autre instant la vitesse n'est pas nulle. Une autre différence est qu'en relativité générale la possibilité pour un rayon lumineux de s'échapper, s'il est émis juste au dessus de l'horizon dépend de sa direction. S'il est dirigé exactement radialement vers l'extérieur, alors il peut s'échapper, dans les autres cas il est capturé par le trou noir. En théorie classique, c'est différent. La capacité d'échapper à l'attraction du corps qui l'attire en un point particulier ne dépend que sa vitesse : Si celle-ci est supérieure à la vitesse de libération en ce point, il s'échappe, sinon, il retombe

4- Un photon ne peut pas être en orbite circulaire sur l'horizon, car comme il y a un mouvement transversal (le rayon est en orbite circulaire), le flot entrant d'espace va l'entraîner dans le trou noir. Il est à fortiori impossible d'être sous l'horizon car la vitesse du flot entrant est encore plus grande que sur l'horizon entraînant tout sur son passage. Le rayon lumineux ne peut être en orbite circulaire que quelque part à l'extérieur de l'horizon. Pour un trou noir de Schwarzschild, le rayon de la sphère des photons se situe à 1.5 fois le rayon de Schwarzschild.

5- Si on observe le ciel depuis un vaisseau se déplaçant à une vitesse proche de la lumière, alors en regardant dans la direction du mouvement les objets apparaissent contractés, plus

brillants et décalé vers le bleu. Si on navigue juste au dessus de l'horizon d'un trou noir, d'après le modèle de la rivière, on doit naviguer très vite à contre courant du flot entrant d'espace dont la vitesse est proche de celle de la lumière. En conséquence, les objets au dessus du vaisseau vont paraître comme dans le cas précédent contractés, sur brillants et décalés vers le bleu. Il faut souligner qu'orbiter juste au dessus de l'horizon d'un trou noir est une chose contre nature et ruineuse en énergie. En fait vous finirez toujours par être à court d'énergie et alors emporté par le flot d'espace. Par contre, en chute libre vers le trou noir on ne voit pas le ciel hautement compacté au dessus de nous.

6- Comme la rivière accélère dans la direction du trou noir, la vitesse de la rivière est plus grande à vos pieds qu'à votre tête si les pieds sont dirigés vers le trou noir. La différence en vitesse de la rivière provoque une force de marée d'étirement dans la direction verticale.

Dans le sens transversal la convergence, à symétrie sphérique, du flot en direction du trou noir provoque une force de compression de votre corps transversalement.

7- Juste au dessus de l'horizon, un photon luttant contre le courant entrant de l'espace met plus de temps pour atteindre un observateur extérieur. Quand l'émetteur se rapproche de l'horizon, cela prend de plus en plus de temps au photon pour s'éloigner de l'horizon. Donc quand un objet approche de l'horizon, un observateur extérieur le voit ralentir de plus en plus et décalé de plus en plus vers les basses fréquences. Asymptotiquement l'objet apparaît se figer et son décalage spectral vers les basses fréquences devient infini (il devient invisible).

8- Le modèle de la rivière utilise un ensemble de coordonnées (globales, pour l'espace de fond) et un ensemble de référentiels localement inertiels qui évoluent dans les coordonnées globales. Relier un ensemble de coordonnées (globales) et un ensemble de référentiels localement inertiels ne rend pas pour autant l'espace temps absolu.

9- D'après le principe d'équivalence, un référentiel gravitationnel est équivalent à un référentiel accéléré, donc s'il n'y a pas d'accélération, alors l'effet de la gravitation est insensible. Cependant, si la rivière d'espace s'écoule radialement à vitesse constante dans la direction du trou noir, il existe un effet de marée transversal lié à la convergence du flot, ce qui se traduit par une force de compression transversale des objets, donc la gravitation doit exister.