Relativité Générale: Commission Cosmologie de la Société Astronomique de France, Avril 2002

Présentation de la théorie de la Relativité Générale

0 - Préambule

La relativité générale est enseignée aujourd'hui dans le cadre d'un formalisme «   ensembliste « commun à la physique moderne.

La démarche, que j'ai suivie, procède d'une approche plus historique, celle qui a prévalu au moment de l'élaboration de la théorie qui m'a paru moins austère.

Dans tous cas la Théorie débouche sur des conclusions qui « bouleversent » nos habitudes de pensées déjà pourtant malmenées par la théorie de la Relativité Restreinte.

La relativité générale est enseignée aujourd'hui dans le cadre d'un formalisme ensembliste commun à la physique moderne. L'espace temps est une Variété différentiable de type Riemannien, au sens de la Topologie, dont on étudie les propriétés.
Ce formalisme procède d'une volonté d'unification et de synthèse de ces branches existantes dans le cadre d'une super théorie et cherche par formalisation et abstraction à extraire les principes communs à ces différentes branches et a en effacer les contradictions apparentes. Cette méthode possède une puissance heuristique indiscutable dans le cadre qu'elle vise.
Il m'a paru prématuré de retenir cette approche, sauf pour certaines parties délicates décrivant la géométrie associée à la RG ou l'approche contemporaine apporte quelques éclaircissements.

Commentaire : Heuristique : qui permet de trouver, de faire des découvertes

La démarche, que j'ai suivie, procède d'une approche plus historique, celle qui a prévalu au moment de l'élaboration de la théorie.

Cette démarche possède également une puissance heuristique forte quoique différente de celle actuellement retenue.
Rappelons , que pour la Relativité Restreinte la physique était en danger, puisque après l'immense succès des équations de Maxwell unissant l'électricité , le magnétisme et l'optique, l'expérience de Michelson remettait tout en cause.
Pour la gravitation la situation était moins critique, à part Mercure qui avait un comportement inexpliqué (mais qui aurait pu s'expliquer par des perturbations d'astres non repérés à l'époque), tout paraissait normal , sauf la propagation « instantanée » de la gravitation. Mais des théories s'inspirant de celles de l'électromagnétisme , étaient en cours d'élaboration. C'est dire qu'il n'y avait pas urgence. C'est dans ce cadre que la démarche historique, de nature épistémologique d'Einstein aboutissant à la « découverte de la Relativité Générale » est intéressante à étudier.

Commentaire : Epistémologie : étude critique de la connaissance scientifique, de son fondement

1- Introduction

Après avoir vainement , pendant plusieurs années tenté d'adapter la gravitation dans le cadre de la RR (Espace temps de Minkowski), Einstein, vers 1913, en rupture avec ses idées précédentes, abandonne le concept de force pour la gravitation et d'espace temps de Minkowski pour le cadre et élabore une toute nouvelle théorie: La théorie de la Relativité Générale qui se résume (complétude) à une seule équation (cf Newton, Einstein, Hilbert)

$$\mathbf{S_{\mu\nu}=\kappa.T_{\mu\nu}}$$

$S_{\mu\nu}$= Tenseur d'Einstein, κ constante d'ajustement, $T_{\mu\nu}$ = Tenseur Energie Impulsion

qui signifie que localement la géométrie de l'espace-temps représentée par le tenseur d'Einstein "S "est conditionnée par l'énergie localement présente (sous toutes ses formes) représentée par le tenseur "T". Cette formulation stigmatise le caractère primordial de la géométrie (métrique-connexion métrique)..

Cette assertion brutale présente quelques petites subtilités qui méritent d'être explicitées

- Théorie de la gravitation (ne concerne pas les autres interactions)

La Relativité Générale ($\neq$RR) est une théorie " Classique et Macroscopique " de la gravitation. Le principal de ses deux piliers , **le** principe d'équivalence **lié à l'égalité stricte de la masse pesante (charge gravitationnelle) et de la masse inerte (énergie) (testé à 10^{-12} aujourd'hui, STEP à 10^{-17}) ne s'applique qu'à la gravitation.**

A noter d'autres particularités de la gravitation par rapport aux autres interactions :

Son extrême faiblesse. (10^{-41} fois plus faible que l'électromagnétique)

Son universalité : (pas de charge nulle)

Avant de rentrer dans le vif du sujet, commençons par recenser les principales difficultés conceptuelles.

- La gravitation n'est pas une force (FAQ 1) *(Rappel Relativité Restreinte)*

Le concept "révolutionnaire" exposé par EINSTEIN, est que la gravitation n'est pas une force comme NEWTON l'entendait, mais la conséquence de la géométrie de l'espace temps .
Cela présente deux aspects en interaction profonde et une remarque.

1-La courbure de l'espace temps , manifestation de la gravitation , agit sur la matière et l'énergie

- Les corps* qui suivent des trajectoires courbes au voisinage de masses, ne font que suivre les géodésiques (chemins naturels de moindre effort**).**

2-La matière et l'énergie, représentées par le tenseur énergie impulsion, courbent l'espace temps.

- *La courbure de l'espace est source d'énergie (gravitation) donc* ***sujet*** *à la gravitation(nl)* .

- Conséquence : Le concept d'accélération, difficile à définir précisément dans ce cas, va être remplacé par le système « chute libre », système inertiel, non accéléré (pas de force)

La gravitation en Relativité générale se différentie des autres interactions en ceci qu'elle gouverne la cadre commun à toutes : l'espace temps. Ceci implique qu'elle est la seule théorie capable de proposer des hypothèses sur l'origine du temps et de l'espace !!!

Rappel RR : Rappelons que la Relativité Restreinte avait été développée pour rendre compte de l'invariance des lois de l'électromagnétisme. La RR a permis bien d'autres découvertes, y compris en mécanique quantique, spin, anti matière etc..

Gravitation : Son extrême faiblesse.

Si l'intensité de l'interaction forte =1, électromagnétique = 10^{-2}, électrofaible= 10^{-5}, gravitation = $10^{-39.}$ (ref Barrow : la grande théorie). A noter que la comparaison d'intensité entre forces et gravitation n'est pas évidente.

Gravitation : Son universalité

Alors que les autres interactions s'appliquent de façon sélective aux particules, la gravité s'applique à toutes les formes de matière et d'énergie (même celle qu'on ne connaît pas comme la mystérieuse matière noire qui pour l'instant ne semble se manifester que par son effet gravitationnel) : Pas de charge gravitationnelle nulle.

Lumière

* y compris la lumière, qui a une masse en vertu de l'équivalence matière énergie, ce qui semble ébranler l'hypothèse de la constance de sa vitesse (direction) au sens de la RR (en fait dans le cadre de la théorie de la RG qui est généralement covariante, la signification physique de cette vitesse dépendant des coordonnées est considérée comme douteuse).

Espaces non Euclidiens

- Il s'ensuit des difficultés de compréhension liées aux références aux **espaces non Euclidiens** nécessités par cette théorie (espaces courbes à 3 dimensions par exemple, qu'il est difficile de se représenter géométriquement), à leurs propriétés telles que la « non connexion » de domaines éloignés (Variété) qui rend problématique la définition des paramètres distants, et aux outils associés tels que les Tenseurs (Il y en a partout !), avec lesquels nous ne sommes pas familiers.

Equations Covariantes

- La notion de covariance**, nécessaire pour satisfaire le principe de Relativité générale, est également obscure** pour plus d'un. Sa **propriété fondamentale est de conserver** la forme des relations donc les équations , donc les lois par tout changement de coordonnées.

La signification profonde de ceci est que les phénomènes physiques ont une réalité physique propre, qui ne dépend pas de l'observateur, c'est à dire du système de coordonnées qui n'est qu'un moyen arbitraire de les décrire, "sous un certain angle". La description doit donc s'en affranchir. On doit donc pouvoir trouver une formulation des lois qui les régissent, indépendante du système de coordonnées.

- Les équations Tensorielles covariantes « universelles » dont tous les membres se transforment de la même manière seront donc utilisées

- A noter que certaines opérations sur les tenseurs ne conservent pas leur nature et devront être amendées (dérivée partielle « classique » en dérivée covariante).

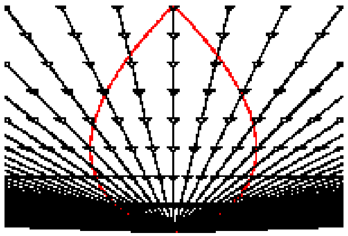
- Cette méthode se révèle très pratique pour généraliser les lois :
- Si on remplace la dérivée partielle classique des équations de Maxwell écrite en RR sous forme tensorielle, par la dérivée covariante on obtient les équations de Maxwell en RG).

- Pas de Calcul et c'est normal ! ! !

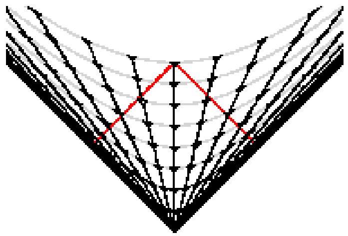
Enfin la cerise (sur le gâteau) : Métrique variable en fonction du temps (FAQ2)

- Le fait que comme **conséquence des équations, la** métrique (invariant fondamental qui sert à mesurer la distance entre deux points de l'espace temps) soit **variable en fonction du temps** est également source de confusion , car cela choque nos concepts habituels : lorsque des objets s'éloignent nous pensons qu'ils le font toujours par un mouvement propre par rapport à un référentiel.
- **La c'est le** référentiel qui change!!

« Fuite » **des Galaxies en 2D (x en horizontal,t en vertical)** ***ref : Wright***



Coordonnées synchrones



Coordonnées Lorentz

Et cela, ce n'était pas prévu au programme **!!**Suite

FAQ1 : Qu'est ce que cette hypothèse farfelue ? : En quoi fait elle avancer les choses (simplicité du modèle). Réalité physique ? : Prédictions du modèle vérifiables

Paradoxalement , on est amené presque naturellement (cf ref 12) à cette conclusion, qui se révèle par ailleurs d'une simplicité diabolique pour rendre compte de tous les phénomènes où la gravitation intervient. Autre conséquence: On ne sait pas associer de tenseur énergie Impulsion à la gravitation (lié à sa nature particulière), difficulté de définir l'énergie lié par exemple aux ondes gravitationnelles. A noter que Riemann a été le premier à montrer (50 ans avant Einstein) que la courbure de l'espace s'apparentait à une force. Par contre, il a traité cet aspect sous un angle purement mathématique, sans aucune idée sur les lois liant les phénomènes physiques et cette courbure. Le mathématicien anglais W. Clifford qui traduisit la conférence célèbre (1854) de Riemann pour la revue "Nature" en 1873 reprit et amplifia ces idées (On a space theory of matter: Proceedings of Cambridge Philosophical society 2 -1876). Voir aussi théories concurrentes (Mie, Weyl,..)

FAQ2 : Qu'est ce encore que ce concept bizarre ? N'est pas un artifice pour résoudre les contradictions de la relativité générale (« c » peut être dépassé, n'est plus constant ?). Quelle différence pour le big bang entre une explosion qui propulse la matière/energie au loin dans un référentiel Minskowskien ou mieux Euclidien et cette élucubration (isotropie, simplicité)

A tel point qu'**Einstein, persuadé que l'univers était statique** (En 1916 il était limité à notre galaxie) , ne trouvant pas de solution avec ses équations, modifie ses équations pour ajouter un terme **(Λ la constante Cosmologique**) qui lui permet de trouver une solution statique.

Bien qu'ayant eu connaissance des travaux de Friedmann (sans Λ, en 1922 , cf Zeitschrift für Physik -ref 3)

" Je tiens les résultats de Mr Friedmann pour justes et éclairants. Ils montrent que les équations du champ admettent pour la structure de l'espace à symétrie centrale, en plus des solutions statiques, des solutions dynamiques (c'est à dire variant avec la coordonnée du temps" A la fin du manuscrit on trouve ce commentaire (biffé)**:** ***solutions auxquelles il est à peine possible d'attribuer une signification physique.***

Pas sectaire, en 1927 il attirera l'attention de Lemaitre sur les travaux de Friedmann

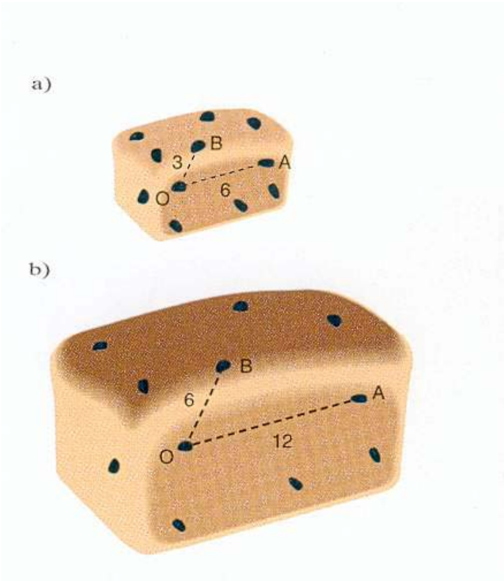
Il s'accrochera à sa solution statique jusqu'en **1930** , jusqu'à ce que **Eddington** montre que la solution **statique est instable** et que la moindre fluctuation de paramètres la fait diverger et que les observations de Hubble vers 1925 mettent en évidence que l'univers est plus étendu qu'on ne le pensait (autres nombreuses galaxies et le décalage vers le rouge..)

Il reniera alors la constante cosmologique en la qualifiant de "**plus grande erreur de sa vie**". Pour la petite histoire cette "**erreur" a été très inspirée** puisque aujourd'hui cette constante est remise à l'honneur.

La puissance de la théorie de la Relativité générale doit s'évaluer non seulement aux problèmes non résolus (ex: périhélie de Mercure) qu'elle permet de solutionner mais encore plus aux prédictions nouvelles, inattendues et révolutionnaires qu'elle révèle.

Au sujet de la métrique variable, illustrons la par une parenthèse Cosmologique (ref 6)

Dans l'expansion de l'univers, conséquence de la RG, (Il n'y a pas de solution statique stable) ce ne sont pas les galaxies qui s'éloignent les unes des autres par rapport a un cadre spatial de référence (référentiel), mais que c'est ce cadre spatial qui gonfle. Ce qui fait que deux points éloignés peuvent avoir une vitesse de récession bien supérieure à la vitesse de la lumière, des dizaines voire des centaines de fois, (en particulier au début quand la constante de Hubble avait une valeur très élevée*) sans que cela viole en quoi que ce soit le principe qui dit qu'on ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière (par rapport au cadre spatial).
Dans un espace Riemannien, la vitesse d'un point éloigné n'est pas physiquement mesurable parce qu'on ne sait pas étendre notre référentiel local jusqu'au point ou il coïnciderait. On ne mesure que des points évènements dans son référentiel par des coïncidences. Prudence sur l'interprétation du décalage spectral!!!



VB = dOB/dt = 3/dt, VA = dOA/dt = 6/dt = 2 VB

Ne pas en déduire que l'univers est un pudding et qu'à ce titre il est anglais et éternel, comme nos amis anglo-saxons voudraient nous le laisser croire (gag) !

*** par exemple, dans l'hypothèse d'un univers de densité critique, les photons du RFC que nous captons maintenant ont été émis à T0 +300 000 ans, lorsque le facteur d'échelle "e"de l'univers était de 1/1000 , la constante de Hubble ** valait 2,1 millions de km/s par méga parsec (30 000 fois sa valeur actuelle) ce qui veut que deux objets distants de 470 000 a.l avaient une vitesse de récession égale à "c".**
Comme le point qui dans le futur (après expansion) allait abriter la terre était distant de 29 Millions d'années lumière à cette époque, la vitesse de récession était supérieure 60 "c". Ce qui fait qu'ils ont commencé à s'éloigner emportés par l'expansion , avant de commencer à se rapprocher lorsque le rythme d'expansion s'est ralenti. Ils sont aujourd'hui distant de 29 milliards d'années lumière (facteur d'échelle de1000). N'oublions pas le facteur 3 entre l'age de l'univers T ***et sa dimension** liée à l'expansion: facteur d'échelle***** $e = (t/ta)^{2/3}$ qui implique $D\ (Gal)= 30\ (1-e^{1/2})$ et $d= e.D$ avec D distance actuelle à la réception de la lumière, d distance au moment de l'émission de la lumière**
Aujourd'hui toutes les galaxies situées à plus de 15 milliards années lumière ont une vitesse de récession supérieure à "c", ce qui ne veut pas dire qu'on ne verra pas, en particulier si la densité est critique car l'expansion ralentit.

**H crit= $(8\pi G\rho/3)^{1/2}$
***Age de l'univers T = 2/3Hcrit
****avec comme conséquence que l'horizon s'accroît plus vite que la taille de l'univers s'il est critique (on en voit une partie de plus en plus grande, la limite étant la brume cosmique avant le découplage pour la lumière.
*****Pendant l'ère radiative cette loi était : $e= (t/ta)^{1/2}$

Fin de parenthèse Cosmologique

Ce qu'en dit Einstein (ref 2)

Pour inclure une note de gaîté , écoutons Einstein au sujet de la difficulté de compréhension de la RG (Conférence 20 juin 1933 à Glasgow)

"A la lumière des connaissances acquises, ce à quoi nous avons eu la chance d'aboutir apparaît comme presque** évident**: un étudiant intelligent est capable de le comprendre sans grand effort" :

Limpidité de la démarche : Deux principes seulement pour une équation

Cette déclaration euphorique d'Einstein appelle un commentaire.

Il est vrai que la démarche suivie par Einstein (comme pour la Relativité Restreinte) est d'une **limpidité stupéfiante** *et inscrit **la Relativité Générale** dans le cadre des grandes **théories rationalistes.**

***Tout se déduit de deux principes (comme en RR) et de deux principes seulement**

- Généralisation du principe de Relativité **de la RR aux systèmes en mouvement relatif accéléré: On augmente la portée et donc la puissance du principe de Relativité**

- Principe d'équivalence **Du fait de l'égalité stricte de la masse pesante (charge gravitationnelle) et de la masse inerte (quantité d'énergie), un champ local gravitationnel est équivalent à un mouvement accéléré et réciproquement un référentiel en chute libre dans un champ gravitationnel est équivalent à un système inertiel. Ceci va permettre un traitement « cinématique » de la gravitation. (Calculs de changement de référentiel).**
- **Le Principe d'équivalence se décline en 3 versions Faible, d'Einstein, et Fort**

Le reste n'est que de la cuisine (un peu lourde il est vrai) mathématique

Le résultat de cette cuisine est proprement renversant et assez lourd à digérer (remise à plat , ce qui est un comble pour des espaces courbes, des concepts d'espace-temps déjà malmenés par la RR), interprétation géométrique de la gravitation, expansion de l'Univers. De façon lapidaire on peut dire que:

Avec Newton si on retire la matière de l'univers, il reste l'espace et le temps!
Avec Einstein, si on retire la matière (énergie) de l'univers il ne reste plus rien !

(propos à nuancer du fait qu'il existe des solutions d'univers avec une métrique mais vides de matière)

De ce fait les concepts d'espace et de temps posé par Kant comme « données immédiates à priori de la conscience » investis à ce titre d'une réalité objective externe (divine dans le contexte de Kant) se réduisent à leur stricte définition (un outil du cerveau indispensable à la compréhension du Monde)

Homogénéité et Cohérence

Le fait qu'elle soit l'œuvre d'une seule personne lui confère homogénéité et cohérence.

Complexité opératoire: Des outils complexes

La difficulté est que les outils nécessaires à la modélisation mathématique de la théorie sont peu familiers.

Einstein a du les étudier, se faire aider par son ami Grossmann, et cela lui a coûté beaucoup de temps et d'errements comme en atteste ses écrits et publications.

Alors que pour la RR on disposait de peu d'informations sur sa genèse, pour la RG comme Einstein était devenu célèbre en 1905 avec la publication de sa théorie, il a eu un large accès aux publications scientifiques, et reconnu par les plus grands savants de son époque (Born, Ehrenfest, Sommerfeld ...) , il a pu correspondre avec eux au sujet de ses travaux .

Citons le philosophe Mach qui l'a beaucoup influencé.

Paradoxalement Mach n'a jamais cru à la RG.

Succès et fécondité

Les succès de cette théorie, élaborée de façon purement spéculative, sont nombreux (courbure des rayons lumineux, Mercure, décalage de fréquence dans un champ gravitationnel, ralentissement des horloges, modèles cosmologiques dont Big Bang, ondes gravitationnelles, etc….).

Sa fécondité en cosmologie est exemplaire: rappelons que cette théorie a été élaborée à une époque (1916) ou on croyait notre univers limité à la voie lactée (les galaxies extérieures comme Andromède et leur récession ont été découvertes bien plus tard (vers 1925) .

A partir d'un modèle ultra simplifié d'univers (une bulle de gaz homogène) régi par l'équation d'Einstein , Friedmann dès 1922 formule deux solutions correctes d'univers (sans constante cosmologique) en expansion soit infinie soit cyclique.

Ce fut le début du modèle standard avec tous ses développements qui vont bien au delà de la RG. Rappelons que la RG prédit également en Cosmologie les trous noirs, solution ou elle cesse d'être applicable (singularité)

Elle reste la théorie de la gravitation de référence, même si elle souffre d'une incompatibilité de nature avec la mécanique quantique. La théorie des supercordes est une tentative d'unification des ces deux grandes théories.

2- L'application à la Cosmologie

"La révolution qu'implique l'abandon de la géométrie Euclidienne, remplacée par la géométrie Riemannienne, procède de l'idée que l'espace temps est fonction de son contenu (ou du moins qu'ils sont liés).
L'espace temps et donc l'univers deviennent ainsi des objets par l'intermédiaire de la gravitation. L'idée force de la théorie de la Relativité générale est donc Cosmologique dans son principe même" (Albert Einstein œuvres choisies).

Rappel: **Avec Newton quand on retire la matière, il reste l'espace et le temps,**
Avec Einstein quand on retire la matière , il ne reste rien (ou presque)

Einstein équation originale	**Poisson (Newton)**
$R_{\mu\nu}-(g_{\mu\nu}.R)/2=0$	$\Delta(\Phi) = 0$ en l'absence de matière
$R_{\mu\nu}-(g_{\mu\nu}.R)/2= - 8\pi.G.T_{\mu\nu}$, ou $R_{\mu\nu}= - 8\pi.G.[T_{\mu\nu} -(g_{\mu\nu}.T)/2]$,	$\Delta (\Phi) =4\pi G.\rho$ dans la matière
Einstein équation modifiée	
$R_{\mu\nu}-[g_{\mu\nu}(R-2\Lambda)]/2=0$	$\Delta(\Phi) = 0$ en l'absence de matière
$R_{\mu\nu}-[g_{\mu\nu}(R-2\Lambda)]/2= - 8\pi GT_{\mu\nu}$	$\Delta (\Phi) = 4\pi G.\rho$ dans la matière

Tenseur d'Einstein, Tenseur, Divergence d'un Tenseur
Tenseur Ricci, Scalaire de Ricci, Tenseur Métrique, Constante Cosmologique
Contraction de Tenseur ,Tenseur de Riemann, ,Dérivée covariante de tenseur, Espaces Riemanniens
Déplacement parallèle curviligne, Coordonnées curvilignes, Connexion Métrique
Coordonnées contravariantes, Covariantes,, espaces vectoriels/duals, etc …..

Quelques définitions (provisoires):

Toutes ces notions demandent à être connues si on veut bien comprendre la Relativité Générale. C'est l'objet d'un cours d'études supérieures qui dure en général 6 mois. Pour une présentation en heure et demie il faut faire des choix drastiques !!.

Qu'est ce qu'un tenseur ?

Un tenseur de rang 2 (μ,ν) , à 4 dimensions (μ et ν varient indépendamment de 0 à 3 : espace temps), est un objet mathématique à 16 composantes (scalaires, ou fonctions s' il existe un espace vectoriel en chaque point de l'espace temps)) qui peut être visualisé par exemple sous forme d'un tableau 4x4 (généralisation du concept de vecteur qui est un tenseur de rang 1)

	| R00	R01	R02	R03|
	| R10	R11	R12	R13|
$R_{\mu\nu}$ =	| R20	R21	R22	R23|
	| R30	R31	R32	R33|

Une équation entre de tels tenseurs de rang 2 génère 16 équations (puisque tout les termes de même indice $\mu\nu$ des tenseurs doivent être égaux entre eux). A noter que si le tenseur est symétrique le nombre d'équations indépendantes est plus faible. Cette définition sera précisée.

Comment modéliser la répartition de l'énergie au niveau de l'Univers ?

En vertu du principe cosmologique, et bien que la situation soit notablement différente entre le coeur des étoiles et le vide glacial de l'espace, à grande échelle il est supposé homogène et isotrope.

Donc par simplification, l'énergie- impulsion est considérée répartie isotropiquement dans l'univers , comme un fluide parfait. $U\mu$, $U\nu$ sont les quadrivecteurs vitesse du fluide, ρ sa densité $g^{\mu\nu}$ le tenseur métrique inverse et
p sa pression, on obtient alors le Tenseur Impulsion Energie suivant

$$T^{\mu\nu}=(p+\rho)U^{\mu}.U^{\nu} - p.g^{\mu\nu}$$

Qu'est ce qu'une métrique ?

La métrique est l’élément clé de la RG, sa forme caractérise la géométrie de l’espace temps. Dans une Variété, pourvue d’une métrique , elle est définie pour un vecteur par son auto produit scalaire (extension du concept 3D de métrique en mécanique Newtonienne déjà étendu à 4D en RR le ds^2). Elle mesure des « distances » entre des points, des points évènements. Elle a une signification physique. A noter que l'équation de la gravitation est "indépendante" de la métrique

En géométrie Euclidienne, repéré par un système orthonormé, la distance « d » entre deux points « a » de coordonnées Xa,Ya,Za et « b » de coordonnées Xb,Yb,Zb calculée à partir des différences de coordonnées par le théorème de Pythagore $d^2= (Xb-Xa)^2+ (Yb-Ya)^2 +(Zb-Za)^2)$ est invariante à toute transformation du référentiel par des translations et rotations (les coordonnées des points « a » et « b » Xa,Xb,Ya,Yb,Za,Zb changent, mais pas la distance « d » calculée dans ces nouvelles coordonnées).

D'une façon générale l'élément métrique s'écrit: $ds^2 = g_{\mu\nu}.dx^{\mu}.dx^{\nu}$ où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique qui est constant en géométrie Euclidienne mais qui dépend des coordonnées en géométrie Riemannienne.(Approche contemporaine : étude des isométries, reflet des symétries de la Variété). Le tenseur de Riemann caractérisé par la métrique définit complètement la courbure. L'équation de la gravitation ne permet en fait que d'en déterminer les paramètres.

Quelle métrique utiliser ? (en Cosmologie)

En vertu du principe Cosmologique évoqué (Isotropie, homogénité), l'Univers identique à lui même en tout point et dans toutes les directions (pas de centre) est dotée d'une métrique à symétrie spatiale maximum. Ces contraintes très fortes sont suffisantes pour la déterminer.

C'est la métrique régie par le *ds² de Robertson Walker* (RW),

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[dr^2/(1-kr^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)]$$

qui correspond au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ ci dessous (on verra comment on l'établit plus loin)

$$\begin{array}{|llll|l} g_{00}=1 & & & & dt \\ & g_{11} = -R^2/(1-kr^2) & & & dr \\ & & g_{22} = -R^2 r^2 & & d\theta \\ & & & g_{33} = -R^2 r^2 \sin^2\theta & d\varphi \end{array}$$

$g_{\mu\nu}$ = 0 si μ est différent de ν, k=1 (hypersphère) ou 0 (plat), ou -1(hyperbolique). Pour d'autres distributions de matière, autres métriques (Schwarzschild pour symétrie centrale par ex)

Comment déduire de l'équation tensorielle de la gravitation des équations classiques

Le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci présents dans le membre de gauche sont complètement déterminés par le tenseur métrique et ses dérivées premières et secondes (via une combinaison des **symboles de Christoffel décrivant les connexions métriques,** on verra plus loin ce que c'est) que l'on peut calculer à partir de la métrique de RW.

$$\begin{vmatrix} R_{00} & 0 & 0 & 0 \\ & R_{11} & 0 & 0 \\ & & R_{22} & 0 \\ & & & R_{33} \end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{R}-2\Lambda) \,. \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & -R^2/(1-kr^2) & & \\ & & -R^2r^2 & \\ & & & -R^2r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = -\,8\pi G. \begin{vmatrix} T_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{33} \end{vmatrix}$$

$R_{\mu\nu}$ = Tenseur de Ricci $\quad$ $g_{\mu\nu}$=Tenseur Métrique $\quad$ $T_{\mu\nu}$= Tenseur Impulsion/E

Tenseur de Rici: $\mathbf{R_{\mu\nu}= \partial\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu/\partial x^\lambda - \Gamma_\mu{}^\lambda{}_\sigma\Gamma_\nu{}^\sigma{}_\lambda}$, scalaire de Ricci: $\mathbf{R=g^{\mu\nu}.\,R_{\mu\nu}}$, $T^{\mu\nu}=(p+\rho)U^\mu.U^\nu - p.g^{\mu\nu}$

et $\quad \mathbf{\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu = 1/2(G^{\sigma\lambda})(\ \partial G_{\nu\sigma}/\partial x_\mu + \partial G_{\mu\sigma}/\partial x_\nu - \partial G_{\mu\nu}/\partial x_\sigma\ )}$

On obtient alors les deux (compte tenu de l'isotropie spatiale en x,y,z) équations ci dessous

$$(2/R)(d^2R/dt^2)+(1/R^2)(dR/dt)^2+Kc^2/R^2 \ -\Lambda.c^2= -8\pi Gp/c^2 \qquad (1)$$
$$(3/R^2)(dR/dt)^2+3Kc^2/R^2 \ - \Lambda c^2= 8\pi G\rho \qquad (2)$$

Avec

R(t) rayon de l'univers,
Λconstante cosmologique,
ρ densité de l'univers,
p pression du "fluide " cosmique,
K constante de courbure (+1, 0 ou -1),
G = Constante de gravitation

Nous disposons alors de tous les éléments pour décrire le modèle Cosmologique.

A noter dans le cas général (métrique quelconque) le calcul du tenseur de Ricci à lui seul et même en tenant compte de ses symétries demande beaucoup d' opérations pour son évaluation (En fait ce sont les symboles de connexion métrique qui demandent le plus de calcul : $\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} = 1/2(G^{\sigma\lambda})(\partial G_{\nu\sigma}/\partial x_{\mu} + \partial G_{\mu\sigma}/\partial x_{\nu} - \partial G_{\mu\nu}/\partial x_{\sigma})$

Quelques modèles très simples

Modèle statique d'Einstein

Einstein croyait l'univers statique donc que son rayon était égal à une constante R0, il suppose K=+1 et p=0 (pression nulle ou négligeable devant $\rho.c^2$)
a) avec l'équation d'origine (sans constante cosmologique):
$$R_{\mu\nu}-(g_{\mu\nu}.R)/2= - 8\pi.G.T_{\mu\nu}$$

On obtient:*

$$2/R(d^2R/dt^2)+1/R^2(dR/dt)^2+K.c^2/R^2 = -8\pi.G.p/c^2 \qquad (1)$$
$$3/R^2(dR/dt)^2+3K.c^2/R^2 = 8\pi.G.\rho \qquad (2)$$
Comme R= R0 est constant et p= 0 , l'équation 1 donne : $c^2/R^2 = 0$!!!
, l'équation 2 donne : **$3c^2/R^2 =8\pi G\rho$!!!**
*A noter qu' Einstein n'a pas travaillé avec les équations sous cette forme , la métrique de RW étant postérieure à 1916

Cela laissa Einstein perplexe, qui jetant aux orties la limite Minkowskienne lorsque l'espace est vide rajouta la constante Cosmologique

$R_{\mu\nu}-[g_{\mu\nu}(R-2\Lambda)]/2= - 8\pi G T_{\mu\nu}$ **d'ou on tire:**

$2/R(d^2R/dt^2)+1/R^2(dR/dt)^2+K.c^2/R^2 \ -\Lambda.c^2= -8\pi G.p/c^2$ **(1)**

$3/R^2(dR/dt)^2+3K.c^2/R^2 \ - \Lambda c^2= 8\pi.G.\rho$ **(2)**

Les équations se simplifient

La première donne : $\Lambda=1/R0^2$

La deuxième donne : $2c^2/R0^2 =8\pi G\rho$

On en déduit : $R0 = c/(2(\pi G\rho)^{1/2}$

A noter l'instabilité de la solution puisque l'équilibre résulte de l'égalité de deux phénomènes antagonistes, dont une variation provoque une amplification de la variation.

A noter que Einstein a du introduire la constante cosmologique Λ, car sinon les équations n'avaient pas de solution.

Cette constante, (controversée) a pour effet lorsqu'elle est positive d'être répulsive, effet négligeable lorsque l'univers est dense (début de l'univers dans modèle standard) mais qui peut devenir prépondérant lorsque la densité est faible (destin de l'univers) accélérant l'expansion.

Elle est également appelée énergie du vide avec le paradoxe que entre sa valeur "prédite" et sa valeur " mesurée" il y a un rapport inouï (10^{120}).

Certains lui font jouer un rôle dans l'hypothèse d'inflation primordiale.

Bref, pour une bévue, un beau sujet de controverse.!!!

2- Modèle de De Sitter (Univers vide)

Cette fois ci le rayon n'est plus supposé constant R(t)

Si **$p=\rho=0$ et $K=0$, les équations se simplifient considérablement (ne sont plus indépendantes)**

Univers vide **: $d^2R/dt^2 - \Lambda c^2 R/3 = 0$**

La solution est évidente **$R(t)= R0.\ e^{\,t.\,(\Lambda c^2/3)^{1/2}}$ (Inflation exponentielle**)

Annexe 1 :Méthode de calcul pour modèle De sitter

En fait on procède de la façon suivante on calcule les symboles de **Christoffel** Γ , à partir de éléments de la métrique diagonale de RW :

$$\begin{vmatrix} G00=1 & & & \\ & G11 = -R^2/(1-kr^2) & & \\ & & G22 = -R^2r^2 & \\ & & & G33 = -R^2r^2\sin^2\theta \end{vmatrix}$$

Gij = 0 si i est différent de j

De la formule : $\Gamma_i{}^k{}_j = 1/2(G^{lk})(\ \partial G_{jl}/\partial x_i\ +\ \partial G_{il}/\partial x_j\ -\partial G_{ij}/\partial x_l\ )$

On peut calculer par exemple:

$\Gamma\ _0{}^1{}_1 = (G^{11})/(2)(\partial G_{11}/\partial x_0 + \partial G_{01}/\partial x_1 - \partial G_{10}/\partial x_1) =$

$(G^{11})/(2)(\partial G_{11}/\partial x_0\ ) = -((1-kr^2)/2R^2)(2R.R'/1-kr^2) = R'/R$

On calcule les autres symboles de Christoffel Γ (beaucoup sont nuls)

On reporte ces symboles dans le tenseur de Ricci qui vaut si $[-g]^{1/2}$ =-1

$$\mathbf{R_{ij} = (\partial \Gamma_i{}^k{}_j)/\partial x_k - \Gamma_i{}^k{}_l . \Gamma_k{}^l{}_j}$$

Pour calculer les équations à partir de l'équation de la gravitation après avoir calculé le tenseur de Ricci à par des symboles de Christoffel

On calcule le scalaire de Ricci à partir du tenseur de Ricci qu'on multiplie par $\mathbf{G^{ij}}$

On multiplie le scalaire de Ricci par la métrique et

Itou pour le terme avec la constante cosmologique Λ

On obtient ainsi le membre de gauche de l'équation

Et comme une équation entre tenseurs se ramène à n équations (entre les éléments d'indices correspondants du tenseur) on déduit les équations citées ci dessus. Ce sont ces équations que l'on va utiliser pour examiner les différentes possibilités d'univers

3 -Autres Modèles (à suivre)

Dans le modèle standard complet on peut utiliser une autre équation déduite

$$\frac{d}{dt}(R^3.\rho) + \frac{p}{c^2}\left(\frac{d}{dt}(R^3)\right) = 0 \qquad (3)$$

On déduit (3)de l'exigence de divergence covariante nulle du Tenseur Energie Impulsion pour un fluide parfait:

- Dans les autres cas (Modèle de Lemaître, Friedmann) on obtient selon la valeur des paramètres des univers fermés, ouverts en expansion infinie ou cyclique.
- Ces modèles sont plus complexes et justifient un exposé dédié. (cf exposé sur Cosmologie).

3-Recette pour une théorie de la relativité générale

Disposer d'une théorie de Relativité restreinte comme modèle à généraliser

Idées de généralisation du principe de relativité

Principe d'équivalence

Outils pour opérer des changements de coordonnées très généraux (Calcul tensoriel)

Une exigence de covariance des équations

Outils pour décrire des espaces (temps) non Euclidiens (Riemann, Christoffel, Ricci,.)

Compatibilité avec la théorie de Newton (champ faibles et faibles vitesse)

Quelqu'un de très motivé, voire opiniâtre et convaincu qu'il a raison (EINSTEIN)

4-Les fondements de la RG

La RG est la suite logique de la RR. Après avoir établi que tous les systèmes inertiels étaient équivalents (pas de référentiel absolu), EINSTEIN s'est demandé si on ne pouvait pas étendre ce principe de relativité à d'autres référentiels (accélérés par exemple).

L'exemple de 2 corps A et B isolés dont l'un "tourne" autour d'un axe reliant ces 2 corps (provoquant une "accélération") fait mettre en doute le caractère absolu de cette assertion. Quelle expérience permet de prouver que c'est A qui tourne et non pas B (en sens contraire). Il y a le fameux argument des masses distantes (principe de Mach).

L'autre question est: d'ou vient il que, vis à vis de la gravitation , les corps quelles que soient leurs masses, leurs formes, leurs natures suivent la même loi (différent de la force électromagnétique).

Cela suppose l'égalité stricte de la masse pesante($f_g = -m_g \nabla\Phi$) et de la masse inerte ($f = m_i\gamma$), mesurée à l'époque à 10^{-8} par Eotvös, aujourd'hui à 10^{-12}, demain à 10^{-17} , alors que ce sont deux concepts bien distincts.

Quelle est l'origine de la masse inerte (principe de Mach : elle naît de l'interaction avec les autres corps de l'univers). Plus tard EINSTEIN a plutôt parlé de champ.

5-Les Idées Nouvelles

1-Principe de Relativité générale: Extension du principe de relativité aux systèmes non galiléens, citons Einstein (synthèse finale 1916) (ref 2)

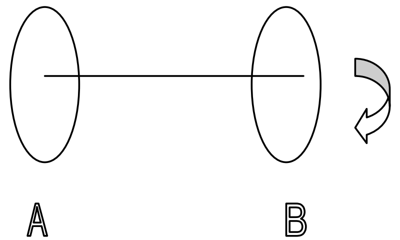
"Raisons qui suggèrent une extension du postulat de Relativité

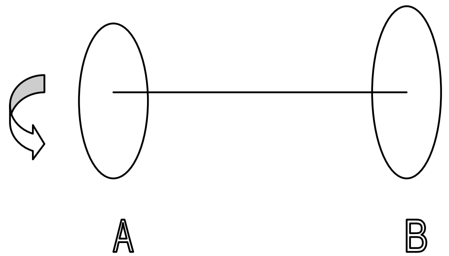
**La mécanique classique et la RR souffrent d'un défaut épistémologique que E. Mach a été le premier à signaler clairement que l'expérience suivante va permettre d'illustrer.
Soit deux corps fluides de même taille et de même nature flottant librement dans l'espace et si éloignés l'un de l'autre et des autres corps de l'espace que les seules forces de gravitation à prendre en compte sont celles qu' exercent l'une sur l'autre les parties d'un seul de ces corps. On suppose que la distance entre les deux corps ne varie pas et que les parties d'un corps n'ont pas de mouvement relatif. Mais supposons que chaque masse, du point de vue d'un opérateur au repos par rapport à l'autre, ait un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante autour de la droite reliant les deux masses. Et supposons qu'en arpentant les corps on trouve que l'un a la forme d'un ellipsoïde et l'autre d'une sphère. Demandons nous pour quelle raison les corps se comportent différemment . /..../Une réponse satisfaisante à cette question doit pouvoir être vérifiée expérimentalement. La mécanique Newtonienne qui fait référence à l'espace "absolu "-attaché à celui qui est**

sphérique ne convient pas. Cet espace non décelable physiquement correspond à une cause fictive. Une réponse satisfaisante ne peut s'énoncer qu'ainsi.
Le système tel que décrit ne fait apparaître aucune cause justifiant une différence de comportement. La cause doit se trouver en dehors du système /...../ Les masses éloignées. "

Elargissement du principe de relativité

"Le principe de l'égalité de masse inerte et de la masse pesante m'apparut dans sa signification profonde. Il devait renfermer la clé d'une compréhension plus profonde de l'inertie et de la gravitation.
Dans un champ de gravitation homogène , tous les mouvements se déroulent comme ils le font en l'absence de champ, par rapport à un système de coordonnées uniformément accéléré .
Si ce principe valait pour n'importe quel processus (principe d'équivalence) , il fallait y voir l'indication que , si on voulait parvenir à une théorie naturelle du champ de gravitation , il fallait élargir le principe de relativité à des systèmes de coordonnées en mouvement non uniformes les uns par rapport aux autres."





2-Principe d'Equivalence : Idée la plus féconde, énoncée dès 1907 (mais pas encore sous ce nom qui apparaîtra en 1911), qui dit qu'un champ gravitationnel peut être localement simulé (ou compensé) par un mouvement accéléré et réciproquement.

(Interprétation purement cinématique du champ de gravitation, possible si le tenseur de Riemann est nul dans le domaine considéré).

La masse inerte et la masse pesante correspondent à deux propriétés de la matière très différentes et leur égalité est a priori surprenante et révélatrice de propriétés physiques très profondes.

Masse Inerte

La masse inerte m_i de la matière correspond à son énergie dans un référentiel. Ce qui fait qu'elle est considérée comme inerte s'opposant au changement est qu'un changement correspond a une modification de son énergie par rapport au référentiel (Energie de départ finie + transfert d'énergie fini = nouvel état d'énergie fini , la masse étant le coefficient qui permet de calculer la nouvelle vitesse résultant de l'accélération).

La relativité restreinte éclaire ce point: $dE= d(mc^2) = m_0.c^2.d\ (1-v^2/c^2)^{1/2}$

C'est le sens profond de l'équation $F= m_i.\ \gamma$

Masse pesante

La masse pesante m_g de la matière correspond à son couplage , avec un « champ » gravitationnel « g ». Elle correspond à la « charge » gravitationnelle. $F = m_g . g$

A priori rien ne relie ces deux paramètres.

Le principe d'équivalence faible (PEF)

Etabli par Galilée et Newton, il est relatif aux champs statiques et uniformes pour la matière.
Il stipule que tous les corps tombent dans un champ gravitationnel en suivant un mouvement identique, accélération constante, quel que soit leur masse, leur nature.
Autrement dit un observateur dans un laboratoire clos , n'aurait aucun moyen en observant la chute des corps de déterminer s'il est dans un champ de gravitation ou soumis à une accélération de valeur correspondante.
Il n'aurait par contre, aucun mal à distinguer un champ électromagnétique d'une accélération. Le mouvement des particules chargées dépend de leur charge, elles seraient soumises à des accélérations très différentes, qu'aucune accélération unique ne pourrait simuler ou compenser.

Le principe d'équivalence d'Einstein (PEE)

Reprenant les résultats de la relativité restreinte, la masse inclut toutes les formes d'énergie.

Ce principe stipule qu'un observateur dans un observatoire clos, ne saura pas distinguer un champ gravitationnel, d'une accélération correspondante quelles que soient les expériences physiques qu'il fait (pas seulement la chute des corps).

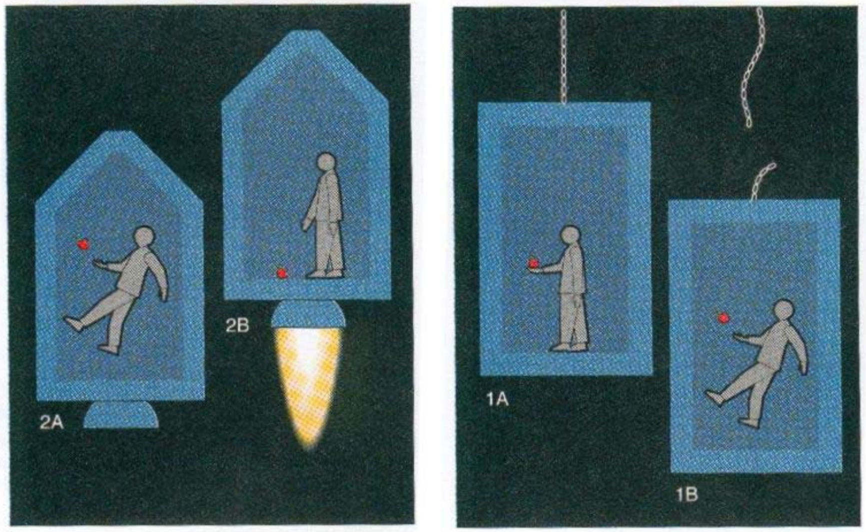
Remarquons que le PEF implique pratiquement le PEE : par exemple, l'atome d'hydrogène, où le proton et l'électron sont liés, a une masse inerte inférieure à la somme des deux isolément. Le PEF impose que la masse grave soit égale, donc la gravitation se couple avec le champ électromagnétique (qui est plus faible couplé) pour compenser le défaut de masse pesante. Ce qui prouve que la gravitation se couple avec toutes les formes d'énergie conformément au PEE

Le principe d'équivalence fort*(PEF) , inclut l'énergie du champ gravitationnel lui même.

La remarque précédente s'applique aussi au cas de deux corps en interaction gravitationnelle.
Donc la gravitation se couple aussi, avec l'énergie du champ gravitationnel.
La Relativité générale obéit au PEF, illustrons ceci :

Un observateur (2B) dans un ascenseur sans fenêtre soumis à une accélération constante égale à "g" par exemple et un autre observateur (1A) dans un ascenseur à l'arrêt dans le champ de gravitation ne verront aucune différences entre les expériences qu'ils peuvent mener.

* Certains auteurs contestent l'intérêt de cette distinction pour eux PEE --->PEF



Réciproquement (2A) si l'observateur ne subit aucune force (flotte librement dans l'espace) et si l'ascenseur (1B) suite à une rupture de câble tombe en chute libre, les 2 observateurs se retrouvent dans la même situation à savoir dans un repère galiléen ou les lois de la RR s'appliquent (Référentiel localement inertiel).

On en déduit immédiatement, la courbure des rayons lumineux, le décalage spectral, le ralentissement des horloges dans un champ de gravitation , car c'est évident dans le système accéléré (ref 4).

Décalage spectral comme conséquence directe du PEE

Considérons la prédiction célèbre du PEE du décalage gravitationnel vers le rouge.
Soit deux boites séparées par une distance z, se déplaçant loin de toute matière (en l'absence de champ gravitationnel) avec une accélération constante a.

Au temps t_0, la boite de traîne émet un photon de longueur d'onde $\lambda 0$

Les boites restent à distance constante, donc le photon atteint la boite de tête après un temps dt = z/c dans le système de référence des boites.
Pendant ce temps les boites ont acquis une vitesse additionnelle dv = adt = az/c
En conséquence le photon atteignant la boite de tête subit un décalage vers le rouge lié à l'effet Doppler classique de

$$d\lambda/\lambda 0 = dv/c = az/c^2$$

On suppose v/c petit, pour travailler au premier ordre.

Conformément au PEE , le même phénomène doit se produire dans un champ de gravitation uniforme.

La courbure nécessaire de l'espace temps

Imaginons une tour de hauteur z située sur une planète , munie d'un champ de gravitation d'intensité a_g (accélération due à la gravitation en mécanique classique)

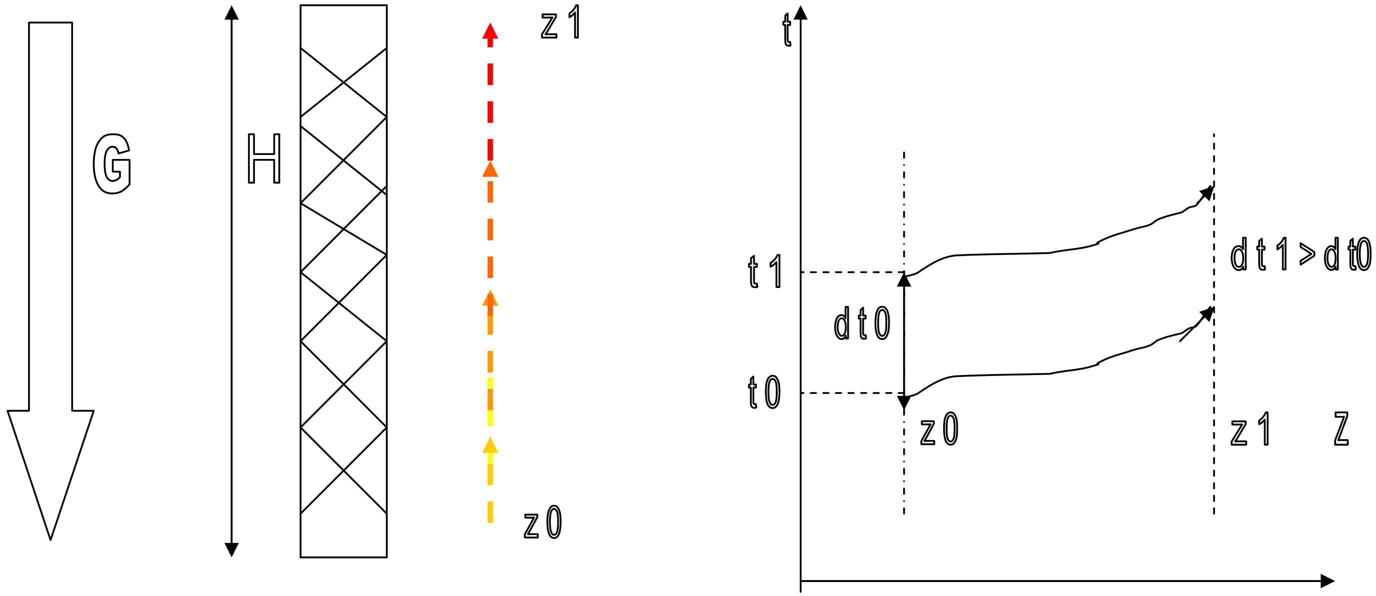
Cette situation est réputée non distinguable de la précédente, du point de vue d'un observateur dans une boite au sommet de la tour (capable de détecter le photon , mais coupé du monde extérieur)
En conséquence, le photon émis depuis le sol avec une longueur d'onde λ_0 doit être décalée vers le rouge de:
$d\lambda/\lambda_0 = a_g z/c^2$

C'est le fameux décalage vers le rouge gravitationnel, conséquence directe du PEE, sans avoir besoin des équations de la Relativité générale. Il a été vérifié expérimentalement d'abord par Pound et Rebka en 1960. Ils ont utilisé l'effet Mössbauer pour mesurer le changement de fréquence de rayons γ dans cette configuration au Jefferson Labs à Harvard.

L'effet gravitationnel de décalage vers le rouge amène un autre argument en faveur de la courbure de l'espace.

Représentons un diagramme spatio-temporel de l'expérience précédente

Cf : http://www.astro.ucla.edu/~wright/relatvty.htm ou http://nedwww.caltech.edu/level5/march01/Carroll3/Carroll4.html



Le physicien au sol émet un rayon lumineux de longueur d'onde λ_0 d'une altitude z_0, qui voyage vers le sommet de la tour d'altitude z_1.
Le temps entre deux crêtes de l'onde émise est $dt_0 = \lambda_0 /c$, et le même intervalle pour la détection est $dt_1 = \lambda_1 /c$. Comme le champ est statique les chemins spatio temporels du début et de la fin de l'intervalle sont strictement parallèles (ne dépend pas du temps d'émission)

On l'a représenté par une courbe quelconque ne représentant pas nécessairement le chemin réel, car là n'est pas le propos.
La géométrie élémentaire voudrait que les temps dt_0 et dt_1 soient les mêmes.
Ce n'est pas le cas, du fait du décalage gravitationnel vers le rouge qui implique que $dt_1 > dt_0$, que l'on peut interpréter comme le fait que l'horloge au sommet bat plus vite
Ou est l'erreur ?
Notre géométrie simple (Euclidienne) ne s'applique pas et on doit appliquer une géométrie correspondant à un espace courbé (l'échelle de temps n'est pas uniforme sur le diagramme, elle dépend de z, pour z_1 , l'échelle est plus petite que pour z_0.
Tout ceci nous incite à penser qu'en présence de la gravitation, l'espace temps doit être pensé en terme de Variété courbe.

Cela confirme que plus on est haut dans le champ plus les horloges battent vite.

Exemple: le ralentissement des horloges en relativité générale dans le champ de gravitation terrestre est égal à celui en RR d'un système animé d'un mouvement uniforme d'une vitesse égale à la vitesse de libération (11,2 km/s,). On peut l'illustrer de façon non rigoureuse par le principe d'équivalence. (Considérer un observateur qui depuis l'espace lointain tombe, dans le champ de gravitation terrestre (référentiel inertiel), à l'approche de la surface sa vitesse sera de 11,2 km/s. Il allume ses rétro fusées pour se poser en douceur, ceci se traduit pour lui par une accélération conduisant à une vitesse de 11,2 km/s, il compare ses observations, à vous de finir.)

Le recours à une courbure de l'espace temps en lieu et place de force s'appuie également sur l'argument suivant. Si une force produit une accélération remarquons que la définition rigoureuse de l'accélération produite par la gravitation seule, est impossible à définir, du fait de l'absence de charge gravitationnelle nulle. On ne peut pas comparer l'effet de la gravitation sur un objet de charge nulle de masse inerte m_i et un objet de charge gravitationnelle m_g et de même masse m_i , puisque m_g est toujours proportionnel à m_i.

Par contre on sait définir rigoureusement le référentiel chute libre qu'on soit en présence ou non d'un champ de gravitation (référentiel inertiel ou les lois de la RR s'appliquent).
D'autre part le PEE ou PEF nous incite à penser que si les autres lois de la physique continuent d'être les mêmes dans un champ de gravitation auquel elles sont soumises (tout ce qui existe à une masse), c'est que la géométrie de l'espace dans lequel elles se déroulent a été déformé , toutes choses égales par ailleurs. Cette explication est très cohérente et rend simplement bien compte du phénomène et illustre son universalité.

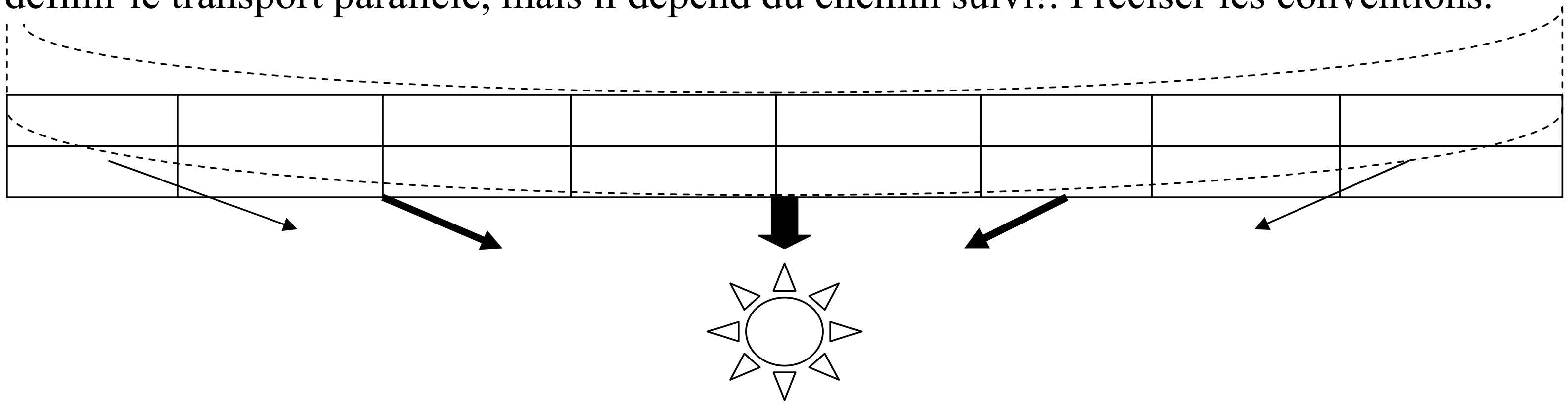
La voie pour établir les lois en Relativité générale est alors toute tracée.

Notre tâche est de montrer comment les autres lois de la physique , autres que celles gouvernant la chute libre des corps sont affectées par la courbure de l'espace temps.
Le paradigme suivant est utilisé. Puisque les particules en chute libre (non soumises à d'autres interactions que le champ gravitationnel) suivent les géodésiques de l'espace temps, et que

conformément au PEF c'est équivalent à un système inertiel, prenez les lois de la physique dans un espace Euclidien écrites classiquement en termes de dérivées partielles (les lois exprimées dans le cadre de la Relativité Restreinte).
Dans la Variété topologique différentiable représentant l'espace temps de la Relativité générale, le référentiel chute libre correspond à l'espace Euclidien tangent localement , donc ces lois de la RR correspondent à celles exprimées en coordonnées Normales Riemanniennes (CNR) de la Variété, coordonnées dans lesquelles elles prennent la forme canonique de la RR.
Traduisez ces lois en termes de relations entre tenseurs via une équation tensorielle covariante , en changeant par exemple les dérivées partielles en dérivées covariantes.
Du fait des propriétés des tenseurs, cette version sera alors valide (localement) dans n'importe quel système de coordonnées qui transforme les CNR en coordonnées quelconques via la transformation généralisée locale .
Cette procédure est quelquefois appelée le principe de covariance, ce qui est un peu excessif, car c'est en fait une pure conséquence du PEE avec la condition mathématique complémentaire que ces lois doivent être indépendantes du système de coordonnées.
Un autre nom pour cette règle est le point virgule remplace la virgule, du fait des conventions utilisées pour les dérivées partielles "," et les dérivées covariantes";"

Notons que le principe de Relativité Générale qui s'est révélé d'une puissance heuristique décisive n'est en fait pas nécessaire du moins en tant que postulat car :
L'exigence d'avoir des lois indépendantes du système de coordonnées est incontournable.

Si on réalise une expérience, les résultats de cette même expérience vus par deux observateurs utilisant des systèmes de coordonnées différents, pour la décrire , doivent être les mêmes.
Il y a nécessairement une représentation des équations qui traduit ce fait (sinon mal formulé).
Un bémol, un système « chute libre », n'est équivalent à un système inertiel que localement et on ne peut pas l'étendre à l'infini contrairement aux systèmes galiléens (rappel de l'arpentage /chronométrage en RR). En RG, la structure de métrage d 'extension du référentiel (on peut imaginer un treillis construit avec des barres « rigides »), dans un champ de gravitation central, serait soumis à un effet de marée et déformée,(mouvement relatif). D'ou la difficulté de parler d'une vitesse d'un objet distant. Les repères galiléens de la Variété sont déconnectés. Il faut définir le transport parallèle, mais il dépend du chemin suivi!. Préciser les conventions.



<u>Moralité: Se ramener à un problème déjà résolu !!</u>

Exemple de changement de coordonnées: le mouvement des planètes vu de la Terre (référentiel x,y,z) et le même mouvement vu du Soleil (référentiel x',y',z')

6-La mise en œuvre

Cette notion de transformation de coordonnées est essentielle pour bien comprendre la démarche de la RG.

Rappel des transformations utilisées en RR (ref 4):

Si un référentiel 1 est caractérisé par ses coordonnées X_i , i de 0 à 3 (X_0 pour t et X_1,X_2,X_3 pour x ,y ,z), le référentiel 2 animé d'un mouvement uniforme (par exemple // à X_1) par rapport à 1 est caractérisé par ses coordonnées X'_j , j de 0 à 3).
Le groupe de Lorentz (qu'on peut représenter par une matrice 4x4 : Λ^i_j), permet de passer de Xi à X'i par $\mathbf{X'_j = \Lambda^i_j X_i = \sum_i \Lambda^i_j X_i}$ (Convention d'Einstein sommation sur indice haut/bas répété)
Ce groupe qui conserve par principe la métrique **($ds^2= c^2dt^2- (dx^2+dy^2+dz^2)$)** est l'équivalent du groupe des rotations dans l'espace 3D (termes en Cos α, Sin α de la matrice de rotation remplacés par cosh ζ, sinh ζ). Λ^i_j vaut si on pose $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ **et** $\beta=v/c=\tanh \zeta$

$$\begin{vmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta & 0 & 0 \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Lambda^i_j = \begin{vmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \eta = \Lambda^T.\eta.\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Cette transformation linéaire s'applique à tout le référentiel.
Elle a la propriété de conserver invariantes les équations de Maxwell (elle a été fait pour!)

Annexe 2

Rappel :Vecteurs , Scalaires et Tenseurs en RR

Un ensemble de 4 valeurs qui se transforme par le groupe de Lorentz comme les différentielles dX^i (dXi) est appelé un quadrivecteur contravariant (covariant).
Une valeur comme ds² qui est invariante est appelée quadriscalaire ou scalaire de Lorentz.
Un exemple de quadrivecteur covariant est le gradient d'une fonction scalaire.
On peut transformer un quadrivecteur contravariant en quadrivecteur covariant en le multipliant par le tenseur métrique (Ai=Mij.A^j)
L'intérêt de ces quadrivecteurs et quadri scalaires en RR est que si on peut écrire des lois de la physique avec ces objets, ces lois sont valables pour tous les systèmes inertiels conformément au premier postulat de la RR.
Ils sont appelés manifestement covariants.
Ceci se généralise aux tenseurs d'ordre supérieurs.

Ecriture des équations de Maxwell sous forme tensorielle

Le vecteur champ électrique E et le vecteur champ magnétique B sont alors les composantes d'un tenseur F^{ij} de rang 2, antisymétrique construit à partir des dérivées partielles de Ai.

$$F^{ij} = \begin{vmatrix} 0 & Ex & Ey & Ez \\ -Ex & 0 & Bz & -By \\ -Ey & -Bz & 0 & Bx \\ -Ez & By & -Bx & 0 \end{vmatrix}$$

Rappel forme Classique

quadri potentiel Ai (i de 0 à 3)

$\nabla xB-\partial_t E = 4\pi J$

$\nabla.E=4\pi\rho$

$\nabla xE+\partial_t B=0$

$\nabla.B=0$

$F^{ij} = dA^i/dx^j - dA^j/dx^i$, les équations de Maxwell (4), (5) s'écrivent:

$\partial_i F^{ij} = 4\pi J^j$ **(RR)** $\nabla_i F^{ij} = 4\pi J^j$ **(RG)*** **(4)**

$\partial_k F^{ij} + \partial_i F^{jk} + \partial_j F^{ki} = 0$ **soit** $\partial(_k F^{ij}) = 0$ **(RR)** $\nabla(_k F^{ij}) = 0$ **(RG)*** **(5)**

Quadrivecteur $J^j = (\rho, J)$, ρ = densité de charge et J trivecteur densité de courant (x,y,z)
Sous cette forme elles sont naturellement invariantes par tout changement de coordonnées par le groupe de Lorentz (6 paramètres ou de Poincaré 10 paramètres).
***On verra plus loin, que sous cette forme, il suffit de remplacer la dérivée partielle par une dérivée covariante pour étendre leur validité à la Relativité générale**

Définition de l'Impulsion en RR (ref 4)

Elle est représentée par un quadrivecteur P^i

P0=E/c, P1=Px, P2=Py, P3=Pz (P0 est la composante de l'impulsion dans la "direction" du temps, Px,Py,Pz sont les composantes d'espace)

Avec E énergie totale de la particule : $E = \gamma mc^2$ et $P = \gamma mv$ (m masse au repos, $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1}$)

C'est cette définition qui sera reprise et généralisée dans le tenseur Energie Impulsion de l'équation d'Einstein

Métrique en RR

La métrique en RR est celle d'un espace de Minkowski de signature +1,-1,-1,-1 (pseudo Euclidien). Elle s'écrit sous forme d'un tenseur d'ordre 2, diagonal, η_{ab} (4x4) tel que $\eta_{00}=+1$, $\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_{33}=-1$(les autres termes sont nuls). On trouve aussi la convention inverse –1,+1,+1,+1
Certains résultats établis en RR vont être repris en RG: Il s'agit de:

$ds^2=\eta_{ab}.dX^a.dX^b$ avec η_{ab} tenseur métrique Minkoswski et $\eta_{ij}.\ \Lambda^i{}_a\ .\Lambda^i{}_b = \eta_{ab}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$d^2\tau=\eta_{ab}.dX_a.dX_b$ avec $d\tau$ temps propre (associé au référentiel qui contient la particule en mouvement, donc au repos), $d\tau$ est un invariant par rapport aux transformations de Lorentz
A noter que ds et $d\tau$ sont identiques, au facteur c près, et comme pour simplifier on prend c=1 on trouvera tantôt l'un tantôt l'autre (paramètre affine).

On définit un vecteur quadri-vitesse
$Vi = dXi/d\tau$
$d^2Xi/d\tau^2=0$: exprime que l'accélération est nulle dans les systèmes inertiels.

Généralisation des transformations

En RG une transformation locale plus générale des coordonnées doit être utilisée.
En fait cette transformation locale est la plus générale possible appliquée à un continuum espace temps (une Variété différentiable de dimension « n » admet localement R^n comme espace tangent, et les relations vont pouvoir s'exprimer en coordonnées Riemanniennes normalisées).
La transformation est locale car seules les dérivées partielles premières des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes interviennent (les dérivées d'ordre supérieur sont supposées infiniment petites par rapport aux dérivées premières lorsqu'on tend vers 0)

$$dX^i = A^i{}_j . dY^j$$

Avec $A^i{}_j = \partial X^i / \partial Y^j$

Ce type de transformation conduit naturellement à utiliser une forme tensorielle pour les relations, puisque les tenseurs opèrent des combinaisons linéaires sur les composantes des vecteurs et vont posséder la propriété de conserver la forme des relations.

Cette transformation n'est linéaire que localement. A plus large échelle elle est hautement non linéaire avec des implications sur la structure de « l'espace temps »
La gravitation n'est pas linéaire, auto interaction : le graviton se couple avec lui même à la différence du photon)

7 - Géométrie de la relativité Générale , des concepts difficiles à se représenter

La métrique

C'est le concept clé de la relativité générale.

Rappelons que cette forme quadratique , invariante par changement de coordonnées caractérise la structure de l'espace (La topologie en est un autre aspect dont la RG ne tient pas compte).

Les espaces Euclidiens sont supposés connus.

Dans un tel espace à n dimensions l'élément métrique vaut
$ds^2= G_{ij}.dX^i.dX^j$ avec $G_{ij}=G_{ji}$ (par construction puisque c'est le produit scalaire des vecteurs de base ei.ej).
Une métrique Euclidienne peut toujours être ramenée par changement de variable à la forme caractéristique
$ds^2= dX1^2+ \ldots.+dXi^2+..+ dXn^2$ (signature +1, $G_{ij} =\delta_i^j$)

L'espace de Minkowski est quasi euclidien (signature +1,-1)

Espaces Riemanniens (Variété Riemannienne)

A partir de la même définition de la métrique
$ds^2 = g_{\mu\nu}.dx^\mu.dx^\nu$, les $g_{\mu\nu}$ qui sont les éléments du tenseur métrique ne peuvent pas être ramenés par changement de variable à une forme Euclidienne et sont des fonctions des coordonnées.

A noter que pour un point donné P de coordonnées X0,..,Xn les $g_{\mu\nu}$ ont une valeur définie et que localement on peut définir un espace Euclidien tangent.

La surface de la sphère est un espace Riemannien à 2 dimensions. On sait qu'en un point de la sphère on peut définir un plan tangent (utile pour faire les cartes)

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ intervenant dans l'élément linéaire différentiel: $ds^2 = g_{\mu\nu}.dx^\mu.dx^\nu$

C'est un tenseur de rang (0,2) donc 0 fois contravariant et deux fois covariant (forme bilinéaire) dont les éléments $dx^\mu.dx^\nu$, peuvent être considérés comme représentant les vecteurs de base.

Le tenseur métrique est l'élément le plus important avec l'équation d'Einstein de la Relativité Générale:

Propriétés du tenseur métrique et de la métrique associée:
Il contient (intrinsèquement) toutes les informations permettant de déterminer la courbure (via la connexion) de l'espace temps (au moins pour les variétés Riemanniennes qui nous intéressent)
Il possède également les propriétés suivantes:

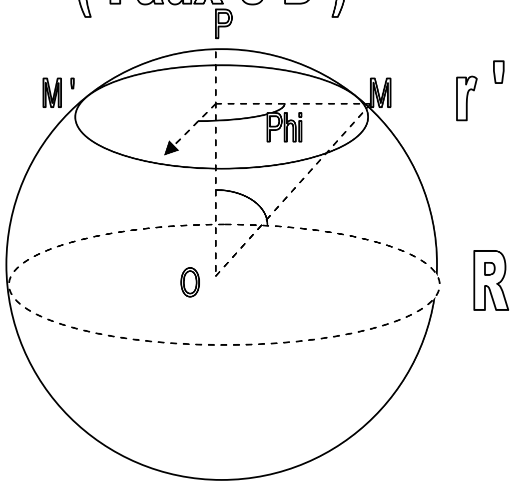
1- Il détermine le passé et le futur
2- Il permet de calculer la longueur d'un chemin et le temps propre
3- Il détermine la plus courte distance entre deux points, et de ce fait détermine la trajectoire des particules de test.
4- La métrique remplace le champ gravitationnel Newtonien
5- La métrique fournit la notion de référentiel inertiel et de là également l'absence de rotation.
6-La métrique détermine la causalité, les trajectoires lumières sont les plus courtes, aucun autre signal ou point matériel ne peut aller plus vite.
7- La métrique se substitue au produit scalaire de l'espace Euclidien de la mécanique classique
8- etc…

Ces propriétés ne sont pas toutes indépendantes, mais elles mettent en relief le rôle essentiel que joue la métrique en Relativité Générale.

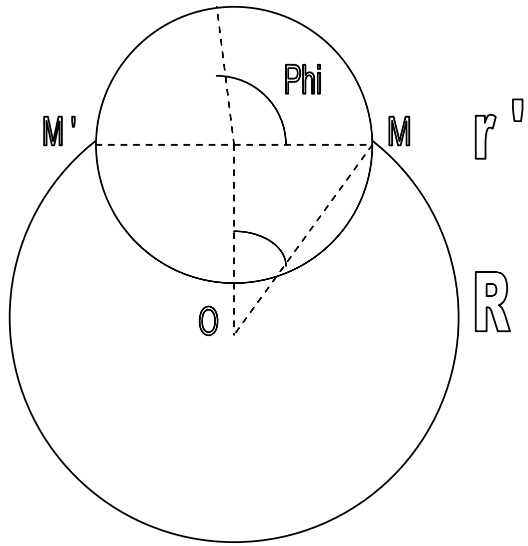
On sait définir la courbure d'un tel espace 2D à partir de la différence entre la circonférence d'un cercle à une distance d'arc "s " d'un point et la valeur" $2.\pi.s$ "qu'elle aurait dans un plan.
Avec $r'= a.\sin s/R$ on déduit $s= \arcsin (r'/R)$ pour la coordonnées "latitude" l'autre "longitude" qui lui est perpendiculaire dans le plan tangent vaut $r'.d\varphi$

Renvoi

Vue en perspective (Faux 3 D)



Idem en coupe replié sur plan de coupe



On arrive à la métrique suivante : **$ds^2 = R^2(dr^2/(1-kr^2) \quad + r^2.d\varphi^2)$**

La courbure $K=1/R^2$, $r= r'/R$, R= rayon de la sphère, $k= KR^2$

r' est le rayon du cercle appartenant à la sphère à une distance s (dont le centre est dans la troisième dimension)

On montre que cette métrique est la plus générale et s'applique aux espaces de courbure positive (k=+1), négative (k=-1) et nulle (k=0)

A noter que cet espace à 2 dimensions (et sa métrique associée) est isotrope (tous les points de la surface sont équivalent) pas de "centre" sinon arbitraire. Bien garder ce concept à l'esprit car il va se conserver pour un espace 3D de type Hypersurface de l' Hypersphère (pas de centre du monde).

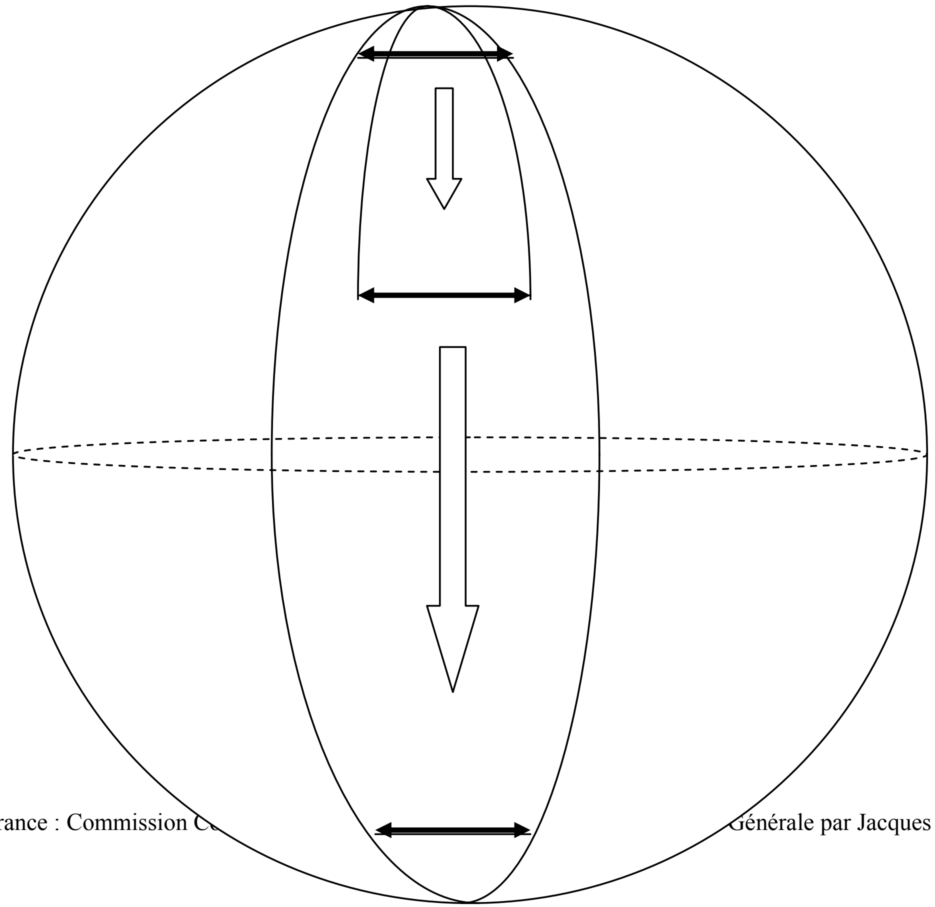
Pendant qu'on est sur l'espace Riemannien 2 D de la sphère profitons en pour examiner quelques problèmes.

-L'expansion de l'univers, de sa métrique entre 2 points quelconques de cette hypersurface.

cf expansion

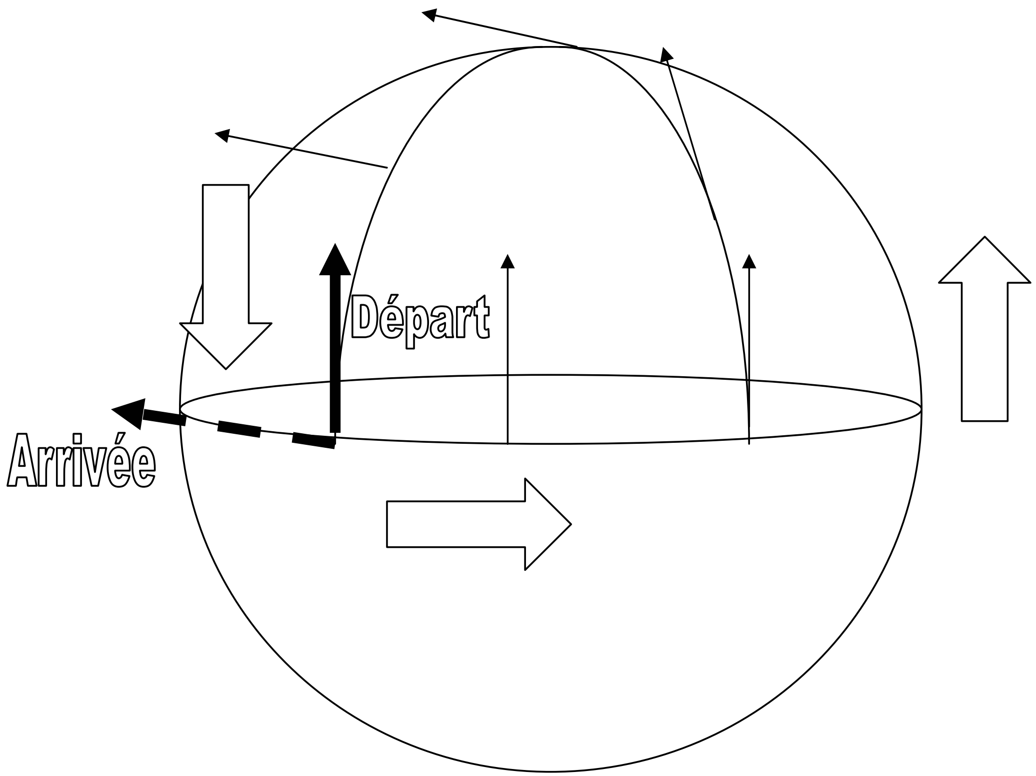
- Effet de Courbure:

Dans un espace de type sphère , hypersphère , la courbure de l'espace déforme la perception (taille, luminosité) des objets



Transport parallèle sur un espace courbe

Après un trajet complet le long du triangle sphérique, le vecteur transporté parallèlement par rapport aux coordonnées sphériques a tourné de 90°



Définition du transport parallèle (cf outils)

Horizon cosmologique dans un Univers en expansion

Au fur et a mesure que l'univers vieillit la distance d'horizon des objets visibles croit plus vite (3 fois que l'age en cas d'expansion critique , ref 6) que le rayon de l'univers .

Dans une expansion critique , on voit un pourcentage de plus en plus élevé de l'Univers.

Par contre la surface d'horizon peut être modulée par la géométrie de l'univers (dans une hypersphère il croit jusqu'à un maximum diminue jusqu'à 0 puis varie de façon cyclique).

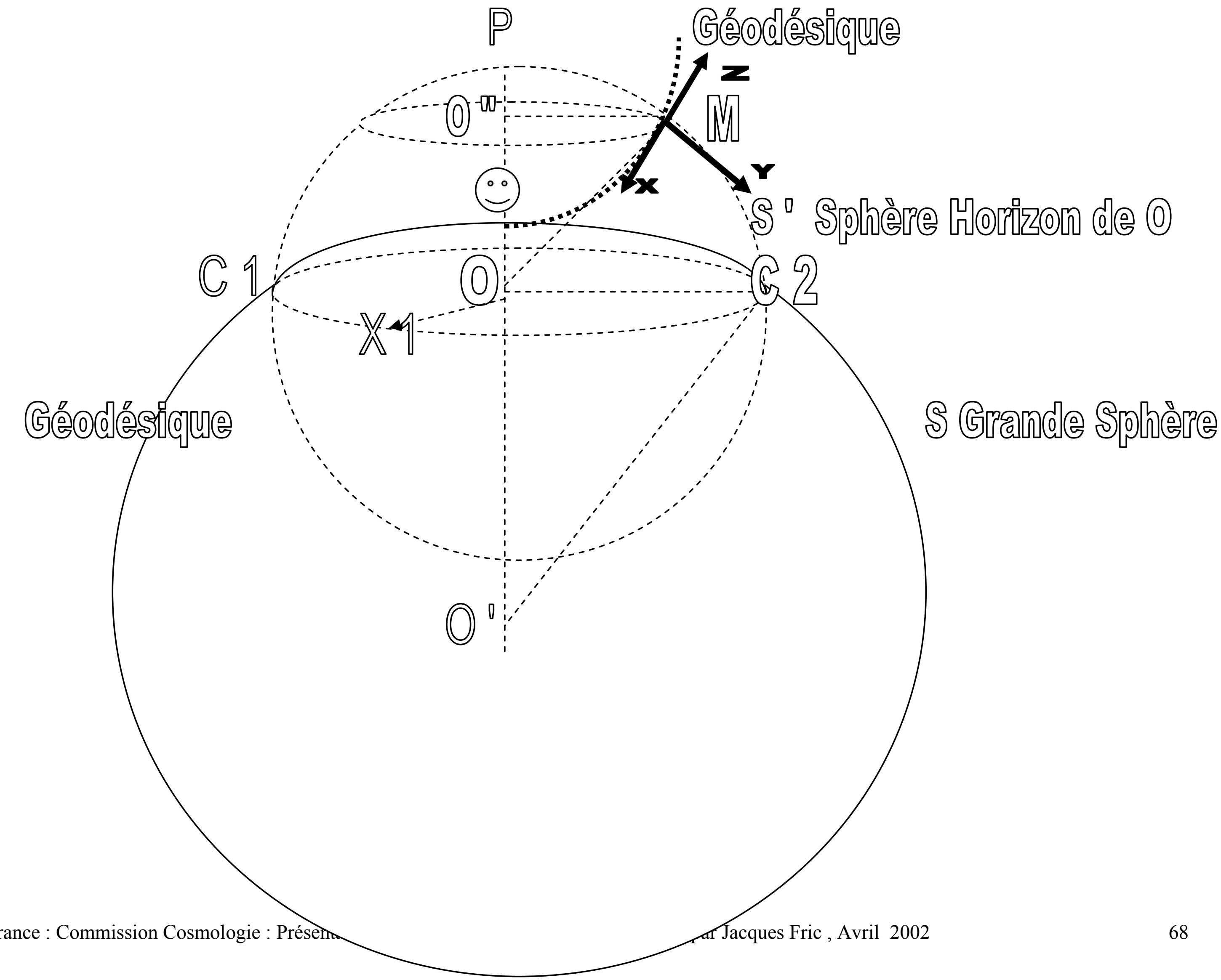
Il est aussi limité par l'opacité avant le découplage (pour la lumière) et la date de formation des objets les plus vieux.

A noter que l'intérêt de la notion d' horizon pour le RFC, pour la fuite critique (c) des galaxies.

Coordonnées Hypersphériques

(Coupe de l'Hypersphère par un espace Euclidien et repliement dans cet espace)

Renvoi : angles C2,O,X1 = φ, O", 0, M = θ



Elle se généralise aux dimensions supérieures (Hypersphère 4D dont l'hypersurface est un espace 3D courbe délimitant un extérieur et un intérieur (hypervolume) 4D Euclidien.

Cette hypersphère de rayon R et d'équation **$x^2+y^2+z^2+w^2= R^2$** (1)est la généralisation de la sphère où l'équivalent des grands cercles de rayon R sont des grandes sphères de rayon R, l'équivalent des cercles de rayon r sont des sphères de rayon r, mais qui contient aussi les grands cercles de rayons R qui sont les géodésiques et tous les autres cercles de rayon r.

La voûte céleste à une distance s (mesurée sur l'arc de grand cercle géodésique) est une de ces sphères contenue dans l'hypersphère.

Au début plus on voit loin et plus l'horizon augmente (on verrait de plus en plus de galaxies si elles sont distribuées régulièrement), il passe par un maximum pour diminuer, se réduire à 0 avec le fait qu'au antipodes les objets paraîtraient très lumineux, comme s'ils étaient très proches (sauf absorption). Des théories prétendent que les quasars ne sont que des galaxies ordinaires proches de l'antipode.

On peut calculer sans problème son hypersurface : **$2\pi^2.R^3$**, et son hypervolume: **$1/2(\pi^2.R^4)$**

Si l'espace a la structure d'une hypersphère cela a des conséquences originales.

Le ds^2 d'un tel espace 3D courbe , cf figure ci avant ou calcul analytique en posant:
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x= r.\sin\theta.\cos\varphi, y=r.\sin\theta.\sin\varphi$, $z=r.\cos\theta$ et $w^2 = R^2 - r^2$ dans l'équation (1),
vaut en coordonnées "sphériques"

$$ds^2 = R^2(dr^2/(1-kr^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)) \text{ avec } k = 1$$

Cette expression se généralise aux courbures négatives (k=-1) et nulle (k=0).
La généralisation à l'espace temps conduit à la formule suivante (on a posé c=1)

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[(dr^2/(1-kr^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)]$$

La contrainte d'homogénéité et d'isotropie de l'espace de l'Univers, conduit à prendre cette métrique pour l'espace dans l'équation d'Einstein appliquée à la cosmologie.

C'est la formule de Robertson Walker (postérieure à l'équation de Friedman)

A noter que l'homogénéité et l'isotropie sont des conditions très contraignantes qui imposent un degré de symétrie maximum, déterminant la métrique et permettant une foliation ***de l'espace/temps par le temps qui apparaît dans la formule de RW.***
On sait définir un temps universel mesuré par exemple par la température du RFC, ce qui permet de définir des hypersurfaces 3D synchrones. (suite)

Géométrie de la Relativité Générale : l'approche contemporaine ref 13

Variétés

Si l'espace-temps forme une variété, on dispose d'un "atlas de cartes" (les coordonnées x ou ξ) et des "fonctions de transition" $\xi = f(x)$ d'une carte à l'autre. L'espace tangent T en un point de la variété définit alors les vecteurs (**base** $\partial/\partial \mathbf{x}^\mu$) ou tenseurs de type (0,1) qui se transforment comme $\partial/\partial \mathbf{x}^\mu = \partial\xi^\mu/\partial \mathbf{x}^\mu \, \partial/\partial\xi^\mu$. Le dual T* de l'espace tangent définit les formes monolinéaires (base $\mathbf{dx}^\mu$) ou tenseurs de type (1,0). Les tenseurs de type (p,q) sont définis sur le produit tensoriel $(\mathbf{T})^p \otimes (\mathbf{T^*})^q$ **,** dont $(\mathbf{dx}^\mu)^p \otimes (\partial/\partial \mathbf{x}^\mu)^q$ forment une base (***f*** dénote le produit tensoriel).

Les tenseurs définis en un point de la variété n'ont a priori ***aucun rapport*** avec ceux définis en un autre point. En particulier la dérivée d'un tenseur n'est pas un tenseur (elle n'a pas les bonnes lois de transformation sous changement de coordonnées).

On définit alors la dérivée covariante $\mathbf{D}_\mu$ d'un vecteur $\mathbf{V}^\nu$ par :
$\mathbf{D}_\mu \mathbf{V}^\nu = \partial_\mu \mathbf{V}^\nu + \Gamma_\mu{}^\nu{}_\rho \mathbf{V}^\rho$ **,** en introduisant des *connexions* $\Gamma_\mu{}^\nu{}_\rho$ avec des propriétés de transformation ad hoc pour que $\mathbf{D}_\mu \mathbf{V}^\nu$ soit un tenseur.

Du coup, ces connexions ne sont pas elles-mêmes des tenseurs. Avec ces connexions, on peut comparer des tenseurs pris à des points différents, c'est à dire transporter un tenseur le long d'un chemin. *Le transport est parallèle si la dérivée covariante est nulle.*

Géodésique

Une géodésique est une courbe transportée parallèlement à elle-même, et elle est donc la courbe la plus "droite" possible sur une variété. Si une notion de longueur existe (donc une métrique, mais ce n'est pas une propriété obligatoire pour une variété en général) la géodésique sera aussi la courbe la plus courte (ou la plus longue , en fait un extrémum).

Si on transporte parallèlement un tenseur d'un point à un autre par deux chemins différents, on n'obtient pas en général le même tenseur à l'arrivée. Sur une courbe fermée, un tenseur peut ainsi ne pas revenir identique à lui-même après transport parallèle.

On dit alors que la variété possède une courbure, définie mathématiquement par le commutateur des deux dérivées covariantes :

$$(D_\rho D_\sigma - D_\sigma D_\rho) V^\mu = R_\mu{}^\nu{}_{\rho\sigma} V^\nu$$

où = $R_\mu{}^\nu{}_{\rho\sigma}$ est le tenseur de courbure de Riemann.

S'il est nul en tout point, la variété est plate et il existe un système de coordonnées (les coordonnées cartésiennes!) où les connexions sont nulles en tout point.

Si la connexion $\Gamma_\mu{}^\nu{}_\rho$ n'est pas symétrique , on dit que la variété possède aussi une *torsion*. Cartan avait étudié une généralisation de la relativité avec torsion pour géométriser l'électrodynamique avec la gravité.

Les équations du mouvement étant symétriques, la torsion ne les modifie pas.

Métrique

L'existence d'une métrique sur une variété définit la notion de distance. La métrique g est un tenseur (2,0) de composantes $\mathbf{g_{\mu\nu}}$. Un changement de coordonnées change les composantes de la métrique, mais non sa signature (le nombre de valeurs propres positives, négatives, ou nulles). Si toutes les valeurs propres sont positives, on dit que la variété est riemannienne, si certaines sont négatives, la variété est pseudo - riemannienne ou Lorentzienne comme l'espace-temps. Une métrique permet de relier vecteurs $\mathbf{V^{\mu}}$ et formes monolinéaires car les $\{\mathbf{g_{\mu\nu}V^{\mu}}\}$ sont les composantes d'une forme monolinéaire (notée $\mathbf{V_{\nu}}$ bien entendu) qui définit le produit scalaire de 2 vecteurs $\mathbf{g(V,V') = g_{\mu\nu}\, V^{\mu}\, V'^{\nu} = V_{\nu}\, V'^{\nu}}$.

La courbe la plus « courte » possible allant d'un point à un autre est solution de l'équation "des géodésiques" :

$$d^2x^{\mu}/ds^2 + \Gamma_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho}\,.(dx^{\nu}/ds)(dx^{\rho}/ds) = 0$$

On définit les *symboles de Christoffel:* $\Gamma_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} = 1/2(g^{\lambda\mu})(\ \partial g_{\rho\lambda}/\partial x_{\nu}\ +\ \partial g_{\nu\lambda}/\partial x_{\rho}\ -\partial g_{\nu\rho}/\partial x_{\lambda}\ )$

et on retrouve l'équation de mouvement d'une particule dans un champ de gravitation *si* on choisit pour connexion les symboles de Christoffel (qui ont les propriétés de transformations requises). La courbe la plus courte est alors aussi la plus droite.

La dérivée covariante de la métrique est automatiquement nulle et le produit scalaire invariant par transport parallèle.

Courbure

Les composantes de la métrique dépendent du système de coordonnées, mais il existe des fonctions de g qui n'en dépendent pas et sont intrinsèques à la variété. A 1 dimension, il n'y en a pas : toutes les variétés sont plates. A 2 dimensions, Gauss a démontré qu'il n'existe qu'une fonction, la courbure gaussienne K qui permet de classer les variétés : quand la courbure est constante, cela se limite à l'espace de Gauss-Bolyai-Lobatchevski (K = - 1/a2) qui n'est pas un sous-espace de l'espace euclidien, au plan (K = 0) et aux sphères (K = 1/a2).

On ne peut construire aucun tenseur nouveau à partir de g et de ses dérivées premières (puisque celles-ci s'annulent dans un repère inertiel). Il n'existe **qu'un seul tenseur** construit à partir de g et de ses dérivées premières et secondes qui soit linéaire dans ces dernières (ce qui est nécessaire pour la physique), le

tenseur de Riemann : $\mathbf{R_\nu{}^\mu{}_{\rho\sigma} = \partial_\sigma\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}.\Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}.\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}}$

L'annulation du tenseur de courbure en tout point est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace soit plat . Ce tenseur mesure d'ailleurs la déviation des géodésiques. S'annulant en espace plat, on peut l'ajouter multipliant n'importe quel tenseur, dans une expression correcte en l'absence de gravitation, par exemple le mouvement d'une particule libre. C'est une source d'ambiguïté (quelle est la "bonne" généralisation gravitationnelle?) dont on se débarrasse en notant que le tenseur de courbure possède une dérivée de plus que la connexion Γ, et que les termes où il figure sont a priori d'ordre devant ceux où figure Γ.

Par contraction, le tenseur de Riemann donne **le** ***tenseur de Ricci*** $\mathbf{R_{\nu\sigma} = R^\mu{}_{\nu\mu\sigma} = \partial_\lambda\Gamma_\nu{}^\lambda{}_\sigma - \Gamma_\nu{}^\lambda{}_\rho.\Gamma_\sigma{}^\rho{}_\lambda}$ puis le *scalaire de courbure* $\mathbf{R = g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}}$. Le tenseur de Riemann possède de nombreuses symétries. En utilisant la forme complètement covariante $\mathbf{R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda}R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma}}$ on a :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu},\ R_{\mu\nu\rho\sigma} = - R_{\nu\mu\rho\sigma} = - R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\nu\mu\sigma\rho} \text{ et } R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0$$

Les 2 premières impliquent que le tenseur de Ricci est symétrique, et qu'il est l'unique tenseur de rang 2 que l'on peut construire à partir du tenseur de Riemann, les 2 dernières que le scalaire de courbure R est unique. En raison de ces symétries, le tenseur de Riemann n'a que n2(n2-1)/12 composantes indépendantes en n dimensions. A 2 dimensions, la seule composante indépendante s'exprime donc nécessairement en fonction du scalaire R. De fait, $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R\,[g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}]/2$. En 3 dimensions, il y a 6 composantes indépendantes que l'on peut exprimer en fonction des 6 composantes indépendantes du tenseur de Ricci. En 4 dimensions, il y a 20 composantes indépendantes, les 10 composantes du tenseur de Ricci ne suffisent plus à absorber l'information, et le reliquat définit le *tenseur de Weyl* (symboliquement, **Riemann = R*g*g + Ricci*g + Weyl**).Ce n'est pas tout

Le tenseur de Riemann étant le commutateur de 2 dérivées covariantes, sa dérivée covariante D_i est nulle. Plus exactement on obtient *l'identité de Bianchi* :

$$D_\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} + D_\sigma R_{\mu\nu\delta\rho} + D_\rho R_{\mu\nu\sigma\delta} = 0$$

Celle-ci joue un rôle essentiel dans la théorie de la relativité générale. Par contraction, elle devient :

$$D_\mu [R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} .R/2] = 0$$

ce qui suggère directement la forme des équations d'Einstein de la gravitation :

$R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}.R/2= - 8\pi.G.T_{\mu\nu}$, en présence de matière,car $D_\mu T_{\mu\nu} = 0$ (conservation de l'énergie-impulsion). Plus profondément, l'identité de Bianchi est reliée à l'invariance des équations par changement de coordonnées.

Espaces symétriques

On s'intéresse souvent à des espaces-temps possédant certaines symétries (sphériques pour Schwarzschild, espace homogène et isotrope pour Friedmann…). Dans un changement de coordonnées $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x'}$, la métrique se transforme suivant $\mathbf{g_{\mu\nu}(x) = (\partial x'^{\rho}/\partial x^{\mu})(\partial x'^{\sigma}/\partial x^{\nu}).g'_{\rho\sigma}(x')}$.

Si sa forme fonctionnelle ne change pas, c'est à dire que $\mathbf{g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\rho\sigma}(x)}$ pour tout x, on dit qu'on a une isométrie. Pour une transformation infinitésimale x' = x + εx, cela se traduit par $\mathbf{D_{\mu}x^{\nu} + D_{\nu}x^{\mu} = 0}$ **(équation de Killing).**

Inversement, il existe des isométries s'il existe des solutions de l'équation de Killing (les vecteurs de Killing $x\mu$). On montre que sur une variété de dimension n il existe n(n+1)/2 isométries au maximum.

Si la variété est isotrope en un point, on peut permuter tous les vecteurs de base de l'espace tangent en ce point : en dimension n, il y a n(n-1)/2 permutations (qui sont des isométries). Le tenseur de Riemann prend alors une forme particulièrement simple : $\mathbf{R_{\mu\nu\rho\sigma} = K(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})}$.

La courbure gaussienne K peut varier d'un point à un autre, tout comme $\mathbf{g_{\mu\nu}}$. Si K ≡ 0 (espace plat), les isométries sont des rotations (espace euclidien) ou des transformations de Lorentz (espace de Minkowski).

Si la variété est homogène, il existe des isométries transportant la métrique d'un point à un autre : en dimension n, il y a n **vecteurs de Killing** correspondants. Si l'espace est plat, ces isométries sont de simples translations. Si la variété est homogène et isotrope, on totalise **n(n+1)/2 isométries**, la symétrie est maximale et K est constant sur la variété. Dans ce cas, le tenseur de Ricci s'écrit $\mathbf{R_{\mu\nu} = K(n-1)g_{\mu\nu}}$ et le scalaire $\mathbf{R = Kn(n-1)}$. La valeur de n et de K (et la signature de la métrique) déterminent entièrement la métrique.

Mais, en général, on ne souhaite pas que l'espace-temps soit maximalement symétrique, mais seulement qu'un sous-espace le soit. Séparons les coordonnées x_m en {ui,va}, où les indices i = 1…m décrivent ce sous-espace, et les indices a = m+1…n les dimensions complémentaires.

On démontre alors que la métrique peut s'écrire sous la forme $\mathbf{ds^2 = g_{ab}(v)\ dv^a dv^b + f(v)\ g_{ij}(u)\ du^i du^j}$, où la métrique $\mathbf{g_{ij}}$ a la forme déterminée par la symétrie du sous-espace, qui dans tous les cas physiques est un espace (par opposition à un espace-temps).

Par exemple, pour un espace-temps à 4 dimensions possédant un sous-espace à 2 dimensions de symétrie sphérique, il y a 2 coordonnées v (appelées en général t et r) et 2 coordonnées u (qui sont **sinθ.cosφ et sinθsinφ**).

Pour une courbure K positive, la métrique du sous-espace est : $\mathbf{\delta_{ij} +(Ku^i u^j./1- Ku^i u^j.)}$

La forme générale du ds² est alors :

$$\mathbf{ds^2 = g_{tt}(t,r).\ dt^2 + 2\ g_{tr}(t,r).\ dt.dr + g_{rr}(t,r).\ dr^2 - f(t,r)\ (\ d\theta^2 + \sin^2\theta\ .d\varphi^2\ )}$$

où $g_{ab}(t,r)$ est une matrice 2 x 2 avec une valeur propre positive et une négative, et **f(t,r)** une fonction quelconque positive.
Par changement de variable, on peut la ramener à la forme :
$$ds^2 = A(t,r)\, dt^2 - B(t,r)\, dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta .d\varphi^2)$$

Cette forme du **ds²** permet de calculer la métrique statique de Schwarzschild autour d'une masse ponctuelle. Elle sert aussi à calculer la métrique autour d'une distribution de masse variable mais sphérique.
En dehors de cette distribution, on retrouve d'ailleurs la métrique statique de Schwarzschild (théorème de Birkhoff, analogue au théorème de Newton qui permet de calculer le champ d'une distribution sphérique comme si toute la masse était concentrée au centre).

Si le sous-espace de symétrie maximale est l'espace à 3 dimensions lui-même, il n'y a qu'une coordonnée v et 3 coordonnées u (vecteur **u**), et le ds² prend la forme :
$$ds^2 = g(v)\, dv^2 - f(v)[du^2 + K (u.du)^2/1-Ku^2)]$$
où f et g sont des fonctions positives de v. La forme classique de Robertson et Walker est obtenue par un astucieux changement de variables $t = \int dv/\sqrt{g(v)}$, $u_1 = r \sin\theta \cos\varphi$, $u_2 = r \sin\theta \sin\varphi$ et $u_3 = r \cos\theta$:
$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [(dr^2/1-kr^2) +r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta.d\varphi^2)]$$

La fonction arbitraire $a(t)\sqrt{f(v)}$ s'appelle le paramètre d'échelle , et le paramètre **k ne prend que les valeurs 1, 0 ou -1. La courbure spatiale $K_3 = k/a2(t)$ s'annule pour k = 0**, mais pas **la courbure spatio-temporelle $K_4 = (k+2)/2a2$.**
L'intérêt de ces divers métriques est qu'elles ne reposent que sur des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'espace, et sont totalement indépendantes des équations d'Einstein de la gravitation. Elles restent donc valables dans d'autres théories métriques de la gravitation que la relativité générale.

Variété : C’est un des concepts fondamentaux de la physique et des mathématiques.
La notion de Variété procède de l’idée que l’espace peut être courbe et avoir une topologie complexe, mais que localement , il peut être assimilé à l’espace Euclien, caractérisé par ses n-tuples R^n

Vecteurs de Killing :

Champ de vecteurs sur la variété qui caractérisent les isométries de la variété.Pour la métrique, ils caractérisent son invariance par transformation par ce champ de vecteurs.
Ils impliquent la conservation de quantités comme l’impulsion sur les géodésiques de particules en mouvement « libre ».. Le vecteur tangent à la géodésique est un vecteur de Killing.
Un espace de symétrie maximum est celui qui contient le maximum de vecteurs de Killing =< n(n+1)/2

8-Outils : Tenseurs, Calcul tensoriel

Quelques définitions.

Cf Ref 8

Composantes contravariantes d'un vecteur X

(1) **$X= x^i.ei$** , (i de 0 à n-1) x^i composantes contravariantes, les ei sont les vecteurs de la base de l'espace vectoriel E^n

Ces composantes sont les composantes "habituelles" d'un vecteur, dans n'importe quel système de coordonnées.

Sur un espace Vectoriel de dimension n, à partir d'une "n" base et de n scalaires (nombres) on construit un être mathématique appelé vecteur d'un espace à n dimensions, qu'on représente comme une « flèche » avec une origine s'il est lié.

Composantes covariantes d'un vecteur X

$x_j=X.ej$ (produit scalaire), xj composantes covariantes.

En substituant à X sa valeur dans (1) et en utilisant les propriété des déterminants et du fait que gij =ei.ej , on tire les relations suivantes entre les composantes contra et covariantes qui sont utilisées en RG:

$x^i = g^{ij}.x_j$
$x_j = g_{ij}.x^i$

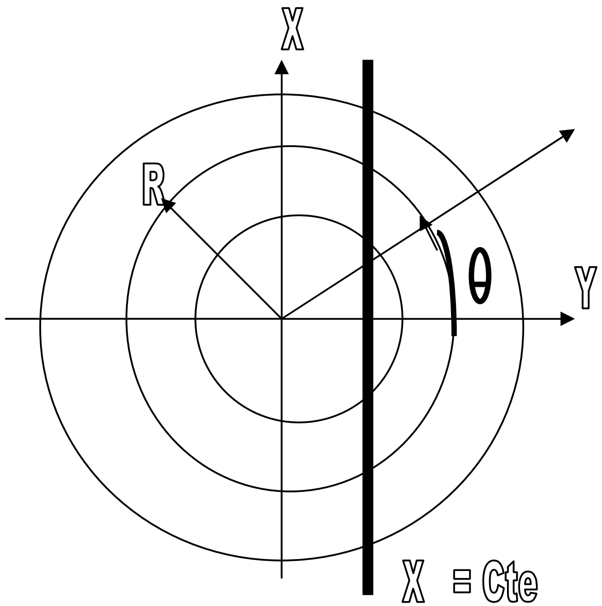
A noter que dans une base cartésienne orthonormée d'un espace Euclidien, les composantes contra et covariantes coïncident

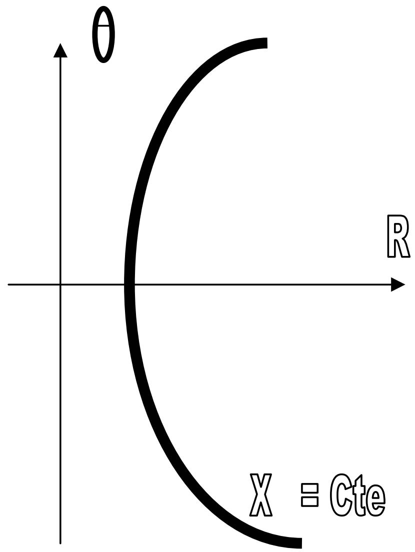
De façon plus mathématique, à partir d'un espace vectoriel qui contient les vecteurs et leurs composantes contravariantes on sait définir l' espace dual (qui a même structure) des formes linéaires appliqué aux composantes de ces vecteurs. Le dual du dual est l'original

Coordonnées curvilignes

Sur un espace ponctuel Euclidien E_n (éléments sont des points) sur lequel est défini un repère (point O + une base $e_1,\ldots,e_n$) si M appartient à E_n, OM= xi.ei
Si xi s'exprime en fonction de n variables yi, par :
xi=fi (y1,y2,…yn), Les yi sont les coordonnées curvilignes.

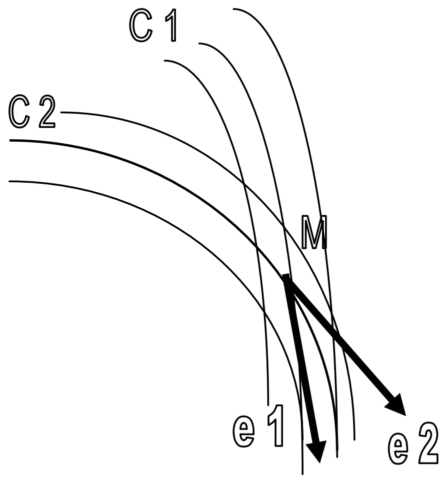
Si un seul yi varie on obtient la courbe « coordonnée yi »
Exemple représentation du plan en coordonnées polaires et cartésiennes: X = r.cosθ, Y= r.sinθ
La droite représentée X=cte s'écrit r.cosθ = Cte soit r= Cte/cosθ, ce qui n'est pas du tout linéaire





Repère naturel en M

Vecteurs tangents aux courbes en M vecteurs base (ei)



Changement de repère en M (Changement de Coordonnées)

$\hat{e}'_j = A^i_j . \hat{e}_i$ avec $A^i_j = \partial y^i / \partial y'^j$

Elément linéaire de l'espace

$x.y = G_{ij}.x^i.x^j$ avec $G_{ij} = \hat{e}_i.\hat{e}_j$

Problème fondamental de l'analyse tensorielle

Connexion métrique

En coordonnées curvilignes à partir du repère naturel défini en M, elle définit comment déterminer le repère naturel au point infiniment voisin M'

C'est un concept fondamental de l'analyse tensorielle, la variation du repère, variation des vecteurs de la base tangente au coordonnées curvilignes va dépendre de la dérivée des Gij.

Par définition ei= dM/dyi
dei/dyk=d²M/dyi.dyk , dei est une combinaison linéaire des dy il vient :

(2) $\mathbf{dei} = \Gamma_{k}{}^{j}{}_{i}.dy^{k}.ej$

$\Gamma_{k}{}^{j}{}_{i}$. est le symbole de Christoffel qui est symétrique en indices bas si la torsion est nulle et qui n'est pas un tenseur mais dont la différence est un tenseur

Sachant que ei.ej=Gij en différentiant cette expression et en remplaçant dei par sa valeur définie dans (2) au bout d'un calcul un peu laborieux il vient

(3) $\Gamma_{kji} = 1/2(\partial G_{ij}/\partial X_k + \partial G_{jk}/\partial X_i - \partial G_{ki}/\partial X_j)$ Symbole de Christoffel de 1 ère espèce.

Celui de 2 ème espèce (le plus utilisé) s'obtient par multiplication Γ_{khj} **par** G^{ih}**.**

(4) $\Gamma_{i}{}^{k}{}_{j} = 1/2(G^{lk})(\partial G_{jl}/\partial x_i + \partial G_{il}/\partial x_j - \partial G_{ij}/\partial x_l)$

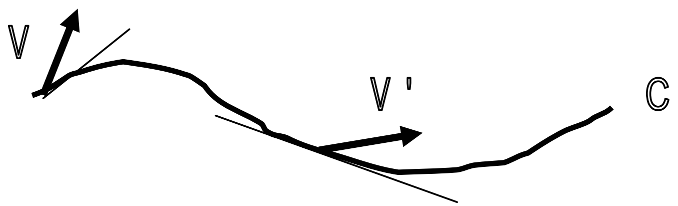
Dérivée covariante d'un vecteur

A la dérivée du vecteur (covariant dans cet exemple) il faut soustraire (ajouter si contravariant) le changement d'orientation qui est du à l'espace (courbe) (cf transport // d'un vecteur ci dessous)

$$\mathbf{DV_i/Ds = dV_i/ds - \Gamma^j{}_{ki}.V_j.dx^k/ds}$$

Transport parallèle d'un vecteur

En coordonnées curvilignes le transport // d'un vecteur s'obtient en déplaçant le vecteur de façon à conserver l'angle qu'il fait localement avec la courbe (la tangente à la courbe).



On voit que si on situe ces coordonnées curvilignes dans un espace Euclidien cadre, la direction dans cet espace change (elle suit la courbe)

C'est pour cela que la dérivée covariante d'un vecteur s'obtient en calculant localement la variation du vecteur et en retranchant la part de variation due à la courbure de "l'espace" , c.a.d à la courbe

Equation Géodésique cf ref 4 & 2

Méthode 1 (Géométrique la plus simple)

Partant du fait que la géodésique est une droite en RR on effectue le changement de coordonnées pour trouver son équivalent dans un système quelconque. Cette méthode est la plus immédiate mais le résultat ne met pas directement en évidence que cette équation ne dépend que de la métrique du système quelconque. On va chercher une autre méthode qui relate l'équation géodésique uniquement en termes de métrique de l'espace temps concerné.

Méthode 2 (Méthode « physique » originale d'Einstein)

On écrit que la géodésique est la courbe qui minimise l'intégrale du chemin (ds).
En fait Einstein utilise sans le dire, le Lagrangien : $L(x,dx/dp) = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}).\ (dx^{\mu}/dp)\ (dx^{\nu}/dp)$ qui est $L= \frac{1}{2}(ds^2/dp^2)$ qui correspond à l'intervalle d'espace temps,

En appliquant l'équation d'Euler Lagrange du mouvement qui exprime la condition d'extremum:
$d/dp(\partial L/\partial(dx^{\mu}/dp)) = \partial L/\partial x^{\mu}$, On arrive à: $\mathbf{d^2X^{\sigma}/ds^2+ \Gamma_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\ .(dX^{\mu}/ds)(dX^{\nu}/ds) = 0}$

Rappellons que l'équation du mouvement (géodésique) est contenue dans l'équation du champ.
Remarquons la similitude avec l'équation du mouvement de Newton, (Courbure = Force)

Rappel: Fonction de Lagrange **du mouvement (Lagrangien) en mécanique classique**

$L(x,y,z,x',y',z',t) = \frac{1}{2}.\ m\ (x'^2+y'^2+z'^2) - U(x,y,z,t) = W-U$ avec W énergie cinétique
L'équation du mouvement exprime que son intégrale $\int_{t0}^{t1} \mathbf{L.dt}$ (intégrale d'action Hamiltonnienne) est minimum sur la trajectoire réelle ce qui implique:
$\mathbf{d/dt(\partial L/\partial x') - \partial L/\partial x = 0}$ **(idem en y et z)**

Fonction de Hamilton en mécanique classique(pm)

$H(x,y,z,x',y',z',t) = \frac{1}{2}.\ m\ (x'^2+y'^2+z'^2) + U(x,y,z) = E$ « énergie totale »
Association d'un opérateur à une grandeur physique pour généraliser l'équation classique à la mécanique quantique par application sur la fonction d'onde ψ.
à E (énergie) on associe $i(h/2\pi).\partial/\partial t$
à $p_x = m\ x'$ (quantité de mouvement) on associe $(h/2\pi i)\partial/\partial x$ (idem pour y,z)

Cf ref 2

Tenseurs

Scalaires

En établissant l'expression de l'intervalle ds^2, dans un référentiel arbitraire $\{X_i\}$, on a implicitement postulé l'invariance de la valeur numérique du ds^2, lors d'un changement de référentiel (X'_j au lieu de X_i). L'intervalle ds^2 est un scalaire, c.a.d la donnée en chaque point de l'espace temps d'un nombre indépendant du choix d'un référentiel particulier . Un scalaire est un tenseur de rang 0. De façon générale on appelle scalaire tout champ S(x) tel que dans un changement arbitraire de référentiel produisant S' (x') on ait : $S(x) = S'(x')$
Il faut bien distinguer cette notion de scalaire d'avec le postulat de Relativité qui implique que non seulement la valeur numérique de l'intervalle, mais surtout sa forme est la même dans tous les référentiels inertiels.

Quadrivecteur contravariant

On suppose connu la notion de vecteur défini dans un espace vectoriel , ensemble dont les éléments sont les vecteurs muni d'une relation d'égalité, d'une loi interne d'addition commutative, associative munie d'un élément neutre et d'un inverse et d'une loi externe de multiplication par R, corps de réels (distributive,...).
Le qualificatif contravariant vient de ce que, lors d'un changement de base les coordonnées (xi) varient selon la transformation inverse de celle des vecteurs de la base (ei).

En physique, un champ de (quadri)vecteurs a un caractère intrinsèque qui peut être défini indépendamment du référentiel (exemple quadri vitesse $U^i = dX^i/d\tau$ avec $d\tau$ invariant car $d\tau = ds^2/c^2$).
Cas particulier: Un élément linéaire est défini par ses 4 composantes $\mathbf{dX^i}$ dont l'équation:
$\mathbf{dX'^j=(\partial X'^j/\partial X^i).dX^i}$ exprime la loi de transformation linéaire et homogène .

Pour cette raison, on considère les $\mathbf{dX^i}$ comme les composantes d'un quadrivecteur (tenseur de rang 1) qu'on appelle contravariant.

Tout objet défini par rapport au système de coordonnées (base d'un espace vectoriel de dimension 4 dans ce cas) par 4 grandeurs A^i et qui se transforme selon la loi:

$\mathbf{A^{i'}= (\partial X'^i/\partial X^j).A^j}$ est aussi appelé quadrivecteur (tenseur de rang 1) contravariant

Quadrivecteur covariant

Si on définit l'ensemble des formes linéaires $f_i(V_j)$ telles que $f_i\ (V_{j\,+}\ V_k) = f_i\ (V_j) + f_i\ (V_k)$ et $f_i(a.V_j) = a.\ f_i(V_j)$ sur les vecteurs contravariants de l'espace vectoriel associé aux vecteurs contravariants , cet ensemble a également une structure d'espace vectoriel.
Il est appelé espace dual du premier. Il contient les vecteurs covariants.
Le qualificatif de covariant vient du fait que lors d'un changement de base, les composantes se transforment comme les composantes des vecteurs de base, ceci implique alors.

Un ensemble de 4 grandeurs A_i est appelé quadrivecteur covariant si pour n'importe quel choix de vecteurs contravariants B^j on a :

$A_i.B^i$= invariant (par changement de coordonnées).

On en déduit la relation**:** **$A'i= (\partial Xj/\partial X'i).Aj$**

A noter la dualité entre l'espace vectoriel des vecteurs contravariants et covariants (si l'un est un espace vectoriel de référence, l'autre est l'espace vectoriel, dual, des formes linéaires sur ce premier et vice versa, le dual du dual est l'original). Les vecteurs de base de ces espaces vectoriels dont les grandeurs Ai représentent les composantes sont notés respectivement ei et e*j.

Tenseur contravariant

Exemple tenseur de rang 2 : Notion de tenseur (produit tensoriel).

On forme les 16 produits A^{ij} des composantes A^i et B^j de 2 quadrivecteurs contravariants:
$A^{ij}= A^i.B^j$

On appelle cette opération "produit tensoriel", les 16 composantes ainsi produites sont les composantes du tenseur A^{ij} , à noter que le tenseur résultant a ses composantes i dans l'espace vectoriel associé au vecteur A^i et ses composantes j dans l'espace vectoriel associé au vecteur B^j

Des propriétés des vecteurs on déduit: $\mathbf{A^{ij\prime}=(\partial X'^i/\partial X^k)(\partial X'^j/\partial X^l).A^{kl}}$

Par extension, on appelle tenseur contravariant de rang 2 tout objet de composantes A^{kl} qui satisfait la relation ci dessus

C'est la définition fondamentale d'un tenseur contravariant

A noter que ceci implique la notion de produit d'espaces vectoriels, puisque le tenseur est défini dans l'espace produit qui contient la « base »(qui correspond à ses composantes) .

Tenseur covariant

De même, on appelle tenseur covariant d'ordre 2 un objet de composantes Aij qui satisfait la relation

$$\mathbf{A'_{kl}=(\partial X_i/\partial X'_k)(\partial X_j/\partial X'_l)A_{ij}}$$

C'est la définition fondamentale d'un tenseur covariant

Un tenseur covariant d'ordre 2 prend un tenseur contravariant d'ordre 2 (ou 2 vecteurs contravariants) en entrée et produit un scalaire en sortie .Cela se généralise aux ordres supérieurs

A noter que ceci implique notion de produit d'espaces vectoriels duals dans lequel est défini le tenseur (ses composantes).

Le produit d'un tenseur contravariant (ou de n vecteurs contravariants) par un tenseur covariant de même rang et dimension produit un scalaire , c'est à dire quelque chose d'invariant par rapport aux coordonnées.

Si T^{ij} se transforme en T'^{ij} par changement de coordonnées x^k en x'^k

Si T_{ij} se transforme en T'_{ij} par le même changement de coordonnées x^k en $x^{k'}$

Alors $T^{ij}.T_{ij} = T'^{ij}.T'_{ij}$ Ce qui exprime l'invariance ! ! ! !

Tenseur mixte et de rang supérieur à 2

C'est le tenseur de plus général qui possède des composantes contravariantes et covariantes dont les tenseurs présentés précédemment ne sont de des cas particuliers.

La loi à laquelle il obéit est évidente (extension et combinaison des lois précédentes)

A noter que ceci implique notion de produit mixte d'espaces vectoriels et d'espaces vectoriels duals dans lequel est défini le tenseur (ses composantes).

Une autre présentation rigoureusement équivalente et plus "intuitive" est la suivante cf ref 7

Un tenseur $T^{j}{}_{,k}$, noté de rang (j,k), j fois contravariant et k fois covariant prend en entrée j vecteurs covariants et k vecteurs contravariants et génère un nombre. Ce nombre en sortie est une fonction linéaire des entrées.
Une autre manière est de dire qu'il prend en entrée k vecteurs contravariants et produit en sortie j vecteurs contravariants, ce qui est équivalent car si on rajoute en entrée les j vecteurs covariants ils "mangent "les j vecteurs contravariants pour produire un nombre!!
Cette définition correspond à la construction d'un tenseur (l'autre à ses propriétés).Cf ref 4
Exemples : le tenseur métrique G_{ij} est un tenseur covariant de rang 2 et de dimension 4. Le tenseur métrique inverse G^{ij} est un tenseur contravariant de rang 2 et de dimension 4

Quelques opérations utiles sur les tenseurs

On peut additionner (soustraire) des combinaisons linéaires de deux tenseurs de même nature, n fois contravariant et p fois covariants avec même dimension d'indice.

On peut multiplier des tenseurs par un scalaire

Multiplier de façon externe deux tenseurs: $T_{ijk} = A_{ij}.B_k$ par exemple (on multiplie deux à deux toutes les composantes du premier par toutes celles du second)
Le rang est la somme des rangs

Contracter les tenseurs (sommer sur un indice haut et bas) **Contraction de $R_j{}^i{}_{kl}$**
On fait i=k et on somme $R_j{}^i{}_{il} = R_{jl}$

Elever /abaisser les indices à l'aide du tenseur métrique ou du tenseur métrique inverse en particulier par exemple $\mathbf{R_j{}^i{}_{kl} \,.\, G_{ih} = R_{jklh}}$, à noter que les composantes du tenseur métrique inverse sont les cofacteurs de celles du déterminant du tenseur métrique d'ou $\mathbf{G^{ij}.G_{ij} = \delta_i{}^i = 4}$

Jacobien d'une transformation.

Il est parfois utile d'opérer des transformations sur des objets non tensoriels. Un exemple important est le déterminant du tenseur métrique G = det G_{ij}, qui se transforme en G' tel que $G' =[\det(\partial x'^i/\partial x^i)]^{-2}. G$. Le facteur « $\det(\partial x'^i/\partial x^i)$ » est le Jacobien.

Densité de tenseur

Des objets avec une telle loi de transformation (impliquant des puissance du Jacobien) sont appelés densité de tenseur

Un autre exemple de densité de tenseur est le volume $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3$
$d^4x' = [\det(\partial x'^i/\partial x^i)].\, d^4x$. **On peut définir un élément de volume invariant** $d^4x\,.(-G)^{1/2}$ qui neutralise le facteur Jacobien.

Dérivée covariante d'un tenseur

La dérivée classique d'un tenseur n'étant pas un tenseur, pour conserver ce caractère tensoriel il faut apporter un terme correctif et définir par là une dérivée covariante.

A partir d'un tenseur covariant de rang 1, $A_i = dF/dx^i$,
on peut former par dérivation un tenseur covariant de rang 2
$$\mathbf{A_{ij} = dA_i/dX^j - \Gamma_i{}^k{}_j.A_k}$$

Le tenseur Aij est appelé extension de Ai

En fait pour un vecteur (tenseur(0,1)) la dérivée covariante corrige la variation intrinsèque propre à la courbure de la courbe sur laquelle on opère la dérivation, et rend ainsi compte uniquement de la variation relative du tenseur par rapport a la courbe.

Divergence covariante d'un vecteur

Divergence de $V^i{}_{,i} = dV^i/dx_i + \Gamma^i{}_{ij}V^j$

Divergence covariante d'un tenseur

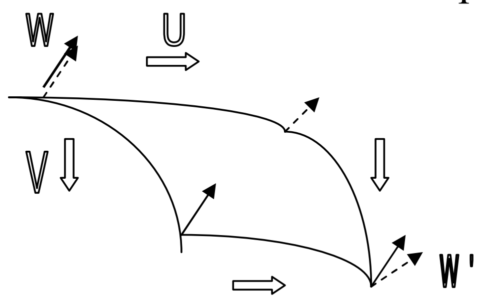
Divergence de $T^{ij} = dT^{ij}/dX_i + \Gamma^i{}_{ik}T^{kj} + \Gamma^j{}_{lk}T^{lk}$

Tenseurs particulièrement utilisés en Relativité Générale

Tenseur de Riemann Cf Ref 8 & 2&4

Einstein a cherché comment construire un tenseur ne contenant que les dérivées premières et secondes des éléments du tenseur métrique pour construire dans le domaine tensoriel covariant l'équivalent de l'équation de Poisson. Il est tombé sur le tenseur de Riemann (solution unique).

Ce tenseur s'établit indépendamment , de façon théorique en faisant parcourir dans un système de coordonnées curvilignes un parallélogramme infinitésimal et en comparant les orientations de départ et d'arrivée d'un vecteur transporté parallèlement sur la courbe.



La différence traduit la courbure et s'exprime par un tenseur assez compliqué: le tenseur de Riemann mixte du 4éme ordre (3 fois covariant et une fois contravariant) dont les éléments sont les dérivées premières et secondes des éléments de la métrique.

A noter que cette courbure est une quantité du deuxième ordre.

$\mathbf{d\delta E_i - \delta dE_i = E_j.R_i{}^j{}_{kl}.dY^k.\delta Y^l}$

L'espace est supposé sans torsion (le parallélogramme curviligne est fermé).

Ce tenseur fondamental décrit complètement la Courbure intrinsèque de l'espace temps au point considéré, mesurable par des observateurs confinés dans cet l'espace. (généralisation à N dimensions de la Courbure de Gauss). Ne pas confondre avec la courbure extrinsèque que pourrait avoir l'espace, s'il était plongé dans un espace de dimensions supérieures et qui serait mesuré par des observateurs vivant dans cet espace.

Tenseur de Riemann : $R_\nu{}^\mu{}_{\rho\sigma} = \partial_\sigma\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}.\Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma}.\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}$

Quelque chose de compliqué à calculer, combinaison de différences de dérivées de Symboles de Christoffel et de différence de produits de ces symboles.

Ce tenseur possède de nombreuses symétries (20 composantes différentes pour 256 possibilités) et décrit exhaustivement la courbure locale de l'espace.
Si par un choix de coordonnées , les éléments du tenseur métrique sont localement constants à un point P, (référentiel chute libre correspondant à un espace tangent de Minkowski), alors le tenseur de Riemann est localement nul au point P (la dérivée première du tenseur métrique=0)

Et s'il est nul dans un référentiel donné, il l'est dans tous, propriété fondamentale de la RG

En revenant à la définition intuitive des tenseurs, le tenseur mixte de Riemann, 3 fois covariant et 1 fois contravariant , va prendre en entrée 3 vecteurs contravariants U,V,W et produire en sortie un vecteur contravariant W' qui est issu du transport de W le long du parallélogramme curviligne infinitésimal défini par U,V , Cf ref 7

$$\mathbf{R(U,V,W)^{\mu} = R_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho\sigma}.U^{\nu},V^{\rho},W^{\sigma}}$$

Le tenseur de Riemann possède de nombreuses (anti)symétries. En utilisant la forme complètement covariante $\mathbf{R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda}R^{\lambda}{}_{\nu\rho\sigma}}$ **on a** :

$$\mathbf{R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu},\ R_{\mu\nu\rho\sigma} = - R_{\nu\mu\rho\sigma} = - R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\nu\mu\sigma\rho}\ \text{ et } R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0}$$

Ce n'est pas tout : le tenseur de Riemann étant le **commutateur de 2 dérivées covariantes,** sa dérivée covariante D_i est nulle. Plus exactement on obtient ***l'identité de Bianchi*** :

$$\mathbf{D_{\delta} R_{\mu\nu\rho\sigma} + D_{\sigma} R_{\mu\nu\delta\rho} + D_{\rho}R_{\mu\nu\sigma\delta} = 0}$$

Celle-ci joue un rôle essentiel dans la théorie de la relativité générale. Par contraction, elle devient :

D_μ [$R_{\mu\nu}$ - $g_{\mu\nu}$ R] = 0

Ou on trouve les tenseurs et scalaire de RICCI

Cette forme suggère directement le tenseur d'Einstein (Seul tenseur construit à partir des dérivées premières et seconde du tenseur métrique et à divergence nulle)

Tenseur de Ricci : cf ref 2

Par contraction de deux indices on obtient le tenseur covariant d'ordre 2 de Ricci: Rij (10 composantes qui permettent de reconstituer 10 composantes du tenseur de Riemann)
Ce tenseur rend compte au deuxième ordre de la variation de volume dans son parcours sur les géodésiques.

$$\mathbf{R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma} = \partial_\lambda \Gamma_\nu{}^\lambda{}_\sigma - \Gamma_\nu{}^\lambda{}_\rho . \Gamma_\sigma{}^\rho{}_\lambda}$$

Mais où sont passées les 10 autres composantes ?

Bonne question: D'abord on ne peut pas annuler complètement le tenseur de Riemann, ce qui voudrait dire que par un changement de référentiel on compenserait un champ de gravitation (on ne le fait que très localement).
Par ailleurs le tenseur Impulsion Energie ne contient pas toutes les informations au sujet de la courbure , **le tenseur de Weyl** = $\mathbf{W^{a}{}_{bcd}}$ contenant le complément lié à la courbure propre de l'espace.
si le choix des coordonnées est tel que $(-g)^{-1/2} = 1$ avec g "déterminant du tenseur métrique.

Le tenseur de Ricci (Cf ref 7)contrôle la dérivée seconde du changement de volume, d'un petit volume lors de sa trajectoire géodésique.

$$\mathbf{d^2V/dXa,dXb = RA,b\ .V^{a}.V^{b}}$$

Le tenseur de Weyl contrôle la déformation (sphère/ellipsoïde)

C'est le tenseur de Ricci qui figure dans l'équation, car la distribution de matière /énergie ne définit pas complètement le tenseur de Riemann.

Scalaire de Ricci

On l'appelle scalaire de courbure
Par multiplication du tenseur de Ricci par $\mathbf{g}^{\nu\sigma j}$ on obtient le scalaire de Ricci : $\mathbf{R} = \mathbf{g}^{\nu\sigma}\ \mathbf{R}_{\nu\sigma}$.
Ce scalaire qui résulte de contractions multiples du tenseur de Riemann en synthétise les informations essentielles et est à ce titre très important (cf principe de moindre action)

Tenseur d'Einstein

C'est une combinaison du tenseur de Ricci, du scalaire de Ricci et du tenseur métrique

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 1/2.(g_{\mu\nu}.R)$$

Ce tenseur est symétrique et à divergence nulle par construction :cf Identité de Bianchi

Le tenseur d'Einstein qui va être utilisé dans l'équation de la gravitation ne définit pas complètement la courbure de l'espace puisque alors que le tenseur de Riemann a 20 composantes , le tenseur symétrique d'Einstein n'en n'a que 10.

La signification profonde est que le tenseur énergie Impulsion, qui décrit la répartition de matière énergie, auquel le tenseur d'Einstein va être égalé ne contrôle que 10 paramètres de cette courbure (mais pas n'importe lesquels cf tenseur de Ricci).
Les autres paramètres sont « extérieurs « à l'équation de la gravitation et apparaissent comme des degrés de liberté vis à vis de la solution.
Il dépendent, par exemple de la métrique (l'équation d'Einstein est valable pour n'importe quelle métrique) ou de conditions initiales, aux limites.

Tenseur Impulsion Energie : Cf ref 7

Tij: Il traduit le flux d'énergie sous toutes ses formes, au point P. Tij correspond au flux de densité d'impulsion dans la direction xi s'écoulant dans la direction xj.

Il s'agit de **l'Impulsion relativiste** (quadrivecteur dont les composantes sont: E/c pour X0 (temps), et : m.V1 pour X1,m.V2 pour X2,m.V3 pour X3 , dimensions x,y,z d'espace)

Pour la coordonnée 0 (le temps) cela s'interprète comme suit:
T00 : Densité d'énergie, car Energie = Impulsion dans la direction du temps et densité = flux dans la direction du temps
T01,T02,T03 : densité d'Impulsion dans les directions x, y, z,
T10,T20,T30 : flux d'énergie dans les directions x,y,z
Autres Tij relatent le flux d'Impulsion de direction i dans la direction j

Ce tenseur est symétrique et à divergence nulle, c'est pour cela que le tenseur d'Einstein doit avoir ces propriétés.
Il ne contient pas toutes les informations au sujet du tenseur de Riemann
Pour le modèle cosmologique (Univers FLRW) on simplifie (Cf ref 4), l'énergie étant assimilée à un fluide parfait sans viscosité de densité d et de pression p dont le tenseur associé est : $\mathbf{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}.u^{\nu} - p.\, g^{\mu\nu}}$

9-Les Résultats

Equation géodésique

Retour sur l'équation de la gravitation d'Einstein

$R_{\mu\nu}-1/2[g_{\mu\nu}(R-2\Lambda)]=0$ en l'absence de matière (mais pas de champ)

$R_{\mu\nu}-1/2[g_{\mu\nu}(R-2\Lambda)]= - 8\pi G T_{\mu\nu}$ en présence de matière

Einstein a obtenu cette équation par **" généralisation "de l'équation de Poisson** qui relie les dérivées secondes du potentiel gravitationnel Newtonien à la densité de masse gravitationnelle à partir des hypothèse suivantes: Cf ref 1

La généralisation relativiste de ρ (densité de matière) est de façon unique le Tenseur Energie Impulsion à cause des équivalences masse gravitationnelle = masse inertielle = énergie / c² et de l'absence en RR de description par un scalaire ou un vecteur de la distribution d'énergie.

Alors comme le choix du référentiel est arbitraire Einstein s'est posé le problème de trouver un tenseur S_{ij} formé à partir du tenseur métrique et de ses dérivées premières et secondes qui puisse être égalé au Tenseur énergie Impulsion (à une constante d'ajustement de dimension près)

Exigence de covariance pour conserver la même forme par changement de coordonnées.

L'énergie est décrite par le membre de droite par un tenseur à divergence nulle (flux conservatif), donc la partie gauche de l'équation doit donc satisfaire également à l'exigence de divergence nulle.

Ce doit être un tenseur complètement déterminé par le tenseur métrique et ses dérivées premières et secondes (analogie avec l'équation de Poisson : part d'arbitraire limitée)

-
- à noter que si on admet la présence de dérivées d'ordre supérieur à 2, il est possible de trouver un tenseur avec beaucoup de constantes arbitraires , faisant intervenir des termes non linéaires du tenseur de Riemann. Il n'existe pas pour l'instant, de faits expérimentaux suggérant une telle généralisation, mais les tentatives de quantification de la gravitation et son unification prévoient de telles modifications aux courtes distances)

La limite en l'absence de matière doit être la métrique de Minkowski

Hypothèse à été remise en cause pour permettre l'introduction de la constante cosmologique.

Limite de Newton pour champ faible , stationnaire et vitesse faibles (équation de Poisson)

Il y a une solution unique qui est le tenseur d'Einstein (cf identité de Bianchi).

En effet, le tenseur de Riemann est trop contraignant (20 composantes indépendantes), car le tenseur énergie impulsion n'en comporte que 10.

Notons pourtant que la courbure de l'espace est déterminée complètement par le tenseur de Riemann, qui est complètement déterminé par la métrique (dont ses dérivées premières et secondes).
Lorsqu'on à choisi la métrique, le tenseur de Riemann est donc connu, on peut se demander à quoi sert alors l'équation de la gravitation, sachant qu'elle s'applique à n'importe quelle métrique.

En fait la plupart du temps la forme de la métrique, correspondante à une situation particulière peut être déterminée, indépendamment de l'équation, par des considérations de symétrie.

Les éléments de l'équation de la gravitation (tenseur de Ricci, scalaire de Ricci qui sont dérivés du tenseur de Riemann) et éventuellement les contraintes associées par l'équation permettent de déterminer des paramètres non définis (10 équations , en fait 6 indépendantes: identité Bianchi). Les autres peuvent l'être par des conditions aux limites. L' équation permet de décrire les relations entre les variables sous forme d'un ensemble d'équations différentielles.
Les autres paramètres de courbure (10) non explicitement contenus dans l'équation, et pas contenus dans le tenseur ni le scalaire de Ricci, sont implicitement contenus dans la métrique et explicitement dans le tenseur de Weyl " l'autre partie du Tenseur de Riemann"
L'exemple typique est l'application à la Cosmologie.

A noter la complétude des équations du champ. Elles **contiennent** les équations du mouvement de la matière (comme conséquence de la conservation de l'énergie $\nabla^{\mu}\mathbf{T}_{\mu\nu}$) à la différence de l’électromagnétisme (force de Lorentz postulée indépendamment des équations de Maxwell) ainsi que les champs centrifuge ou de Coriolis (≠ Newton)

Ces équations différentielles sont en général complexes à résoudre (solutions pour des métriques présentant des symétries importantes) et sont **non linéaires**.

En particulier la masse grave de deux masses en interaction gravitationnelle n'est pas la somme des masses graves individuelles pour respecter le principe d’équivalence $m_g=m_i$. Le champ gravitationnel se couple avec lui même pour compenser ce défaut . Ayant une énergie, il « gravite ».
C’est pourquoi il est possible d’avoir des champs de gravitation qui sont leur propre source dans un espace vide et donc des modèles d’Univers courbés sous l’effet de l’énergie de gravitation résultant de leur courbure et vide de toute matière! ! !.
L’équation de la gravitation qui n’annule que les 10 composantes du tenseur de Ricci quant le tenseur Energie Impulsion est nul, **n’annule pas** le tenseur de courbure de Riemann qui a 20 composantes, permet de telles solutions (courbure sans matière)

A noter que aujourd’hui on déduit l’équation « d’Einstein » de la condition extrémale d’intégrale d’un Lagrangien

La métrique associée à cette équation a une solution exacte dans le cas de masse à répartition centrale (à l'extérieur de la masse) :

La métrique de Schwarzschild Cf ref 4 $ds^2 = dt^2(1-rs/r) - dr^2(1-rs/r)^{-1} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)$

avec $rs = 2G.M$ (G: constante gravitation, M masse centrale générant le champ de gravitation):
Pour le Soleil par exemple rs = 3km (le rayon réel du soleil est supérieur à 600 000 km !!)

A noter que pour les corps très denses ou le rayon serait < à rs (**trous noirs**) la signature des coordonnées de temps et d'espace s'inversent quand r <rs , horizon évènementiel.
Deux singularités apparentes : r = 0 qui est réelle et r = rs qui peut être éliminée par changement de coordonnées (coordonnées de Kruskal par exemple).

Pour un observateur extérieur, une horloge tombant vers un trou noir semblera battre de plus en plus lentement (Il ne la verra jamais franchir l'horizon).
Pour un observateur qui tombe dans le trou noir c'est différent, sa montre et lui étant dans le même référentiel, il est très rapidement , inexorablement absorbé, comme projeté en avant dans l'espace vers la singularité r=0 (la coordonnée « r » devient de type temps !). Et plus il lutte, plus c'est court !

Trous noirs de Schwarzschild : Statique, neutres, un horizon, fontaine blanche, univers multiples, trous de ver, censure cosmique, perte d'information, évaporation, cas des trous noirs stellaires, théorème de singularité d'Hawking
Trous noirs statiques chargés (Reissner-Nordstrom) : Zéro, deux, ou double horizons, univers multiples, singularité nue.
Trous noirs en rotation chargés ou non (Kerr-Newman): trois horizons, ergosphère (extraction d'énergie), singularité en anneau, univers multiples, boucles temporelles

Confirmations de la relativité générale

En l'appliquant la métrique de Schwarzschild à la lumière ($ds^2=0$) on trouve la valeur de déviation des rayons lumineux par le soleil 1,7"(2 fois la valeur classique) et pour le champ central du soleil la rotation du périhélie de Mercure 43" 03 par siècle à comparer à 43" 11 +/-0,45" mesuré .

En RG dans la métrique de Schwarzschild, le"potentiel central gravitationnel" vaut

$$V(r) = \varepsilon(1/2 - Gm/r) + L^2/2r^2 - GmL^2/r^3$$

(L moment angulaire unitaire, $\varepsilon = 0$ particule non massive ou 1 si massive)

Confirmations récentes de la Relativité Générale (1997)

Ondes gravitationnelles

Détection indirecte par perte d'énergie de systèmes binaires relativiste lié à l'émission d'ondes gravitationnelles.
Interféromètres Virgo et Ligo pour détection directe (sensibilité 10^{-22}) expériences prochaines

Précession de Lense Thirring

Entraînement du référentiel par un corps massif en Rotation (conséquence de la RG), en 1997 observation (RayonsX) sur 3 étoiles à neutrons et 5 trous noirs. Satellite Gravity Probe B à venir.

Effet Shapiro (prédit en 1964)

Non seulement les ondes radio sont déviées mais elles subissent un accroissement brutal (200 µS en cas d'occultation de Mars par le Soleil) du temps de trajet lors d'une occultation.
Confirmation en 1976 par les réflecteurs laser posés sur Mars par sonde Viking à 0,1%.

Précision de confirmation de la Relativité générale.

Dans des expériences récentes (pulsars binaires) la précision de confirmation atteint 10^{-14} , limitation due à la précision des horloges terrestres (10^{-17} à venir). A titre d'exemple la théorie quantique la mieux vérifiée l'electrodynamique quantique est vérifiée avec une précision de 10^{-11}

Annexe 3: cf ref 4

La solution de Schwarzschild s'obtient de la façon suivante:

Par raison de symétrie on suppose la solution de la forme
$Ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta . d\varphi^2)$

a) On calcule la limite de A et B pour r = l'infini sachant qu'on tend vers un espace plat. (facile)
b) On calcule les connexions métriques $\Gamma i,\hat{}k,j$ (Pour les courageux, car si la plupart sont nulles, il en reste !)
c) On utilise l'équation $R_{ij} = 0$ pour le champ à l'extérieur de la masse pour obtenir un jeu d'équations A (r), B (r)
d) On combine les équations obtenues en c) pour déduire $A'(r).B(r) + B'(r).A(r) = 0$ c.a.d $A(r).B(r) = Cte$. A) est utilisé pour déterminer cette constante. On montre que $d^2(r.A(r)/dr^2 = 0$ et on résout ce qui donne $A(r) = (1 - rs/r)$ ou rs est une constante.
e) Par utilisation de la limite de Newton on montre que $rs = 2Gn.M$

10-L'élaboration laborieuse de la théorie

L'élaboration de la RG qui durée 10 ans n'a pas été sans erreurs et fausses pistes.

Après avoir tenté sans succès d' adapter les équations de Newton à la RR (1907) (le groupe de transformation de Lorentz de la RR , est inadéquat du fait qu'il transforme tout le référentiel, alors que la transformation ne peut être que locale), la reconnaissance formelle du principe d'équivalence (1911) et un premier calcul (faux) de la déviation des rayons lumineux par le soleil (0,83"), en 1912 Einstein tente de généraliser l'équation de Poisson dans une théorie scalaire qui se révèle être une impasse
En 1913, Einstein prenant conscience de l'intérêt des travaux de Gauss et Riemann , avecl'aide de Grossmann, s'est tourné vers une solution généralement covariante qu'il a délaissé pour une covariance limitée aux transformations linéaires parce qu' il ne retrouvait pas l'approximation de Newton aux champs faibles et qu'il pensait que cela violait le principe de causalité.
Convaincu de tenir enfin la solution , il doit déchanter devant les prédictions fausses de cette théorie (18" pour l'avance du périhélie de Mercure). Après cette épisode de covariance limitée des équations, il revient à la covariance générale dans la synthèse finale de 1916 qui constitue la version actuelle de la théorie.,

11-L'approximation Newtonnienne

11-1 Loi du mouvement (équation géodésique)

La Loi de Newton qui traduit que l'accélération ne dépend que du "champ de gravitation" cf ref 4

$$d^2x^i/dt^2 = - d\Phi/dx^i \qquad (1)$$

avec $\Phi = -GM/r$: Potentiel gravitationnel statique de Newton dont dérive la" force" et i de 1 à 3 (x,y,z)

est en fait une équation géodésique et doit se comparer ***à l'équation Géodésique de la RG*** **:**
(L'équivalent de l'équation de la gravitation est l'équation de Poisson)

$$d^2x^k/ds^2 + \Gamma_i{}^k{}_j\,.(dx^i/ds)(dx^j/ds) \quad =0 \quad \text{ou} \quad d^2x^k/d\tau^2 + \Gamma_i{}^k{}_j\,.(dx^i/d\tau)(dx^j/d\tau) \quad =0 \qquad (2)$$

Avec τ= temps propre , $c.d\tau = ds$ et comme on a posé c=1, en valeur $d\tau = ds$

Rappelons que** dx^0 **est la coordonnée de temps (en fait** c.dt**), les autres** dx^i **étant les coordonnées d'espace** (x,y,z)**. Dans l'approximation Newtonienne (champs faibles et statiques, vitesses faibles), on peut alors ne retenir dans (2) que les expressions relatives à** (dx0/ds).(dx0/ds)**) (soit i=j=0 dans l'équation (2) qui sont très grandes par rapport aux autres (car** c.dt>> dx,dy,dz**) soit:

$$d^2x^k/d\tau^2 \sim\ - \Gamma_0{}^k{}_0.(dx^0/d\tau)(dx^0/d\tau) = \quad - \Gamma_0{}^k{}_0.(dt/d\tau)(dt/d\tau) \qquad (3)$$

Rappelons l'expression des symboles de Christoffel (connexion métrique) qui interviennent dans l'équation géodésique

$$\Gamma_i{}^k{}_j = 1/2(G^{lk})(\partial G_{jl}/\partial x^i + \partial G_{il}/\partial x^j - \partial G_{ij}/\partial x^l) \qquad (4)$$

Pour évaluer (3) à partir de l'expression générale (4) on voit qu'il faut connaître les **Gij**

Dans l'approximation champ faible stationnaire, la métrique étant quasi Minkowskienne, on peut représenter les éléments de la métrique par

$$G_{ij}=\eta_{ij}+H_{ij} \qquad (4bis)$$

η_{ij} **étant le tenseur métrique de** ***Minkowski**** **et** H_{ij} étant un **infiniment petit du premier ordre considéré comme une perturbation.**

**Attention , on rencontre 2 formulations de signe opposés de* η_{ij} *, nous avons pris la convention* +1,-1,-1,-1 *dans cet exposé*

De plus, avec i=j=0, sachant que la métrique de Minkowski est diagonale, G_{jl} , G_{il} ***sont nuls sauf pour l=i=j=0 soit:***

$$\Gamma_0{}^k{}_0 = 1/2(G^{lk})(\partial G_{0l}/\partial x^0 + \partial G_{0l}/\partial x^0 - \partial G_{00}/\partial x^l) = 1/2(G^{lk})(-\partial G_{00}/\partial x^l) \qquad (5)$$

i,j,k,l

Les termes en rouge sont nuls (dérivées par rapport au temps d'un phénomène statique)

G_{00}**= 1+H00** *est l'élément de la métrique lié à la coordonnée x0 (temps*) ***il vient*:**

$$\partial G_{00}/\partial x^l = \partial(1+H_{00})/\partial x^l = \partial(H_{00})/\partial x^l \qquad (6)$$

$$\Gamma_0{}^k{}_0 = -1/2(G^{lk})\, \partial(H_{00})/\partial x^l \qquad (7)$$

Calculons le tenseur métrique inverse les éléments non diagonaux sont négligeables (perturbations), restent les éléments diagonaux

$$G^{lk} = 1-H_{lk} \sim 1, \text{ pour } l=k = 0 \text{ et } G^{lk} = -1-H_{lk} \sim -1 \quad \text{pour } l=k = 1,2,3 \text{ soit } \Gamma_0{}^k{}_0 = 1/2.\partial(H_{00})/\partial x^k \qquad (8)$$

car H_{ll} est une perturbation petite devant 1.

G_{lk} *sera utilisé pour* **l=k=1,2,3** ***,car pour l=0*** *(temps)* ***le produit par la dérivée associée*** **$\partial G_{00}/\partial x^0$ est nul**

En reportant dans (3) et en renommant les indices" l,k "égaux " i " , en remplaçant dx0 par dt, on obtient

$$d^2x^i/d\tau^2= -1/2(dt/d\tau)^2.dH_{00}/dx^i \quad \text{(en renommant l'index k en i)} \qquad (9)$$

Pour i= 0 c'est à dire pour la coordonnée dt l'équation (6) s'annule car H00 est statique **: $d^2t/d\tau^2= 0$**

On déduit **$dt/d\tau$ = cte**,

En divisant alors les deux membres de l'équation (9) **par $(dt/d\tau)^2$** *, facteur constant, on obtient*

$$d^2x^i/dt^2= \underline{- 1/2(dH_{00}/dx^i)} =- 1/2(d(1+H_{00})/dx^i)= - 1/2(dG_{00}/dx^i)=-d\Phi/dx^i \qquad (1) \quad (10)$$

ce qui est la loi de Newton en posant de façon générale **$H_{00} = 2\Phi$ +cte , compte tenu que pour $H_{00} = 0$ le champ doit être Minkowskien , la constante est nulle.**

On en déduit G00 = 1 +2Φ

Remarquons comment à la notion classique de <u>potentiel gravitationnel Φ,</u> on fait correspondre en Relativité Générale une <u>Courbure de l'Espace Temps H_{00}</u>

11-1-b : Approximation Newtonnienne (synthèse)

Trois conditions: (1)-Vitesse des particules v <<c, (2)-Champ faible, (3)-Champ statique.

Rappel Newton : $d^2x^i/dt^2 = -d\Phi/dx^i$ *: Φ = potentiel gravitationnel* *(-GM/r)* (1)

Rappel Equation géodésique (ds=dτ) d' Einstein: $d^2x^\sigma/d^2\tau + \Gamma_\mu{}^\sigma{}_\nu .(dx^\mu/d\tau)(dx^\nu/d\tau) = 0$ (2)

(1) *dx0= cdt >>dxi on néglige ces dernières:* (2) devient: $d^2x^\sigma/d^2\tau \sim -\Gamma_0{}^\sigma{}_0 .(dt/d\tau)^2$ (3)

Rappel Connexion *métrique*: $\Gamma_\mu{}^\sigma{}_\nu = 1/2(G^{\rho\sigma})(\partial G_{\nu\rho}/\partial x^\mu + \partial G_{\mu\rho}/\partial x^\nu - \partial G_{\mu\nu}/\partial x^\rho)$ (4)

Calcul de Γ en fonction des hypothèses précédentes μ=ν=0

$\Gamma_0{}^\sigma{}_0 = 1/2(G^{\rho\sigma})(\partial G_{0\rho}/\partial x^0 + \partial G_{0\rho}/\partial x^0 - \partial G_{00}/\partial x^\rho) = 1/2(G^{\rho\sigma})(\partial G_{00}/\partial x^\rho)$ **(3)** (5)

$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}$ **soit** $G_{00} = 1 + H_{00}$ **et** $\partial G_{00}/\partial x^\rho = \partial(1+H_{00})/\partial x^\rho = \partial(H_{00})/\partial x^\rho$ *Métrique quasi-RR* **(2)** (6)

$G^{\rho\sigma} = -1 - H^{\rho\sigma} \sim -1$, Avec $\rho=\sigma=1,2,3$ **soit** $\Gamma_0{}^\sigma{}_0 = 1/2\partial H_{00}/\partial x^\sigma$ *Calcul avec métrique quasi-RR* *(2)* (8)

$d^2x^i/d^2\tau = -1/2(dt/d\tau)^2.dH_{00}/dx^i$ *report dans (3) et comme $d^2X0/d\tau^2=0$, $dt/d\tau$=cte* (9)

$d^2x^i/dt^2 = -1/2(dH_{00}/dx^i) = -d\Phi/dx_i$ (1) , $H_{00} = 2\Phi$, $G_{00} = 1+2\Phi$, *On a divisé (9) par $(dt/d\tau)^2$* (10)

11-2 Approximation de la loi de Poisson

On déduit la loi de Poisson de l'équation de la gravitation par la même méthode.

Rappelons l'équation de la gravitation de la RG

$R_{ij}-1/2G_{ij}.R= - 8\pi.G.T_{ij}$ **elle peut aussi s'écrire** $R_{ij}= - 8\pi.G.(T_{ij} -1/2(G_{ij}.T))$ **(1)**

Dans le cas de l'approximation de Newton, le tenseur d'énergie de la matière est déterminé par ρ densité de matière au sens étroit. Toutes les composantes de T_{ij} *s'annulent sauf pour* $T_{00} =\rho =T$, $Tij = T = \rho$ (2)

Rappelons la formulation du tenseur de Ricci $R_{ij}= \partial\Gamma_i{}^k{}_j/\partial x_k- \Gamma_i{}^k{}_l\Gamma_j{}^l{}_k$ **(3)**

Pour les mêmes raisons que précédemment** **les composantes** G_{ij} **autres que** G_{00} **sont négligées ainsi que les dérivées par rapport au temps. Le terme $\Gamma_i{}^k{}_l\Gamma_j{}^l{}_k$ **de (3)** ***est négligé car du second ordre. Il reste en développant*:**

$$R_{ij} \sim \partial\Gamma_i{}^k{}_j/\partial x_k = \partial\Gamma_i{}^0{}_j/\partial x_0 + \partial\Gamma_i{}^1{}_j/\partial x_1 + \partial\Gamma_i{}^2{}_j/\partial x_2 + \partial\Gamma_i{}^3{}_j/\partial x_3$$

en développant Γ en fonction des G_{ij} **pour i=j=0** *il vient*

$\partial\Gamma_i{}^k{}_j/\partial x_k =-1/2(\partial^2G_{00}/\partial X_1{}^2+ \partial^2G_{00}/\partial X_2{}^2+\partial^2G_{00}/\partial X_3{}^2) = (-1/2)\ \Delta G_{00}$ **(4)**

E*n reportant (2) et (4) dans (1) il vient:* $\Delta G_{00} =\Delta H_{00}= 8\pi G.\rho$

soit l'équation de Poisson $\Delta\Phi= 4\pi G.\rho$ *avec* $G00 =1+2\Phi$, $H_{00} =2\Phi$ ***car*** $\Delta(1+2\Phi)=$ $2\Delta\Phi=8\pi G.\rho$

12- De la réalité physique des coordonnées en Relativité générale

Ces coordonnées n'ont aucune réalité physique, ce qui a troublé les physiciens dont Einstein, elles ne sont pas mesurables par des procédés physiques. (cf ref 2)

Changement de coordonnées

"Il s'agissait donc d'élaborer une théorie dont les équations conservent leur forme par une transformation non linéaire des coordonnées. Savoir si cela devait être vrai pour des coordonnées quelconques (mais continues) ou seulement pour certaines transformations , je l'ignorais pour le moment .Je me rendis bientôt compte qu'avec la conception des transformations non linéaires requises par le principe d'équivalence, c'en devait être fini de l'interprétation physique directe des coordonnées: on ne pouvait plus exiger que les différences entre coordonnées représentent des résultats immédiats de mesures effectuées à l'aide de règles et d'horloges.
Ce point me tracassa beaucoup car je restai longtemps incapable de comprendre ce que tout compte fait les coordonnées doivent représenter en physique.
Je ne réussis à sortir de ce dilemme qu'en 1912 grâce à la réflexion suivante:
Il fallait trouver une nouvelle formulation de la loi de l'inertie, qui en l'absence de champ de gravitation, et en utilisant un système inertiel comme système de coordonnées, s'identifie avec la formulation galiléenne du principe d'inertie.

Formulation qui dit qu'un point matériel sur lequel n'agit aucune force est représenté par une droite dans l'espace temps (4D), c.a.d la ligne la plus courte ou plus précisément une ligne extrémale.
Ce concept présuppose celui de **longueur d'un élément de courbe, c.a.d d'une métrique.**

En RR la métrique (ds^2)quasi Euclidienne est une fonction bien déterminée des éléments différentiels des coordonnées.
Si on introduit d'autres coordonnées grâce à une transformation non linéaire , le ds^2 reste une fonction homogène des éléments différentiels des coordonnées mais les coefficients de cette fonction (Gij) ne sont plus des constantes: Métrique Riemanniene
Les courbes extrémales du genre temps de cette métrique donnent la loi du mouvement.
Les coefficients décrivent le champ de gravitation par rapport au système de coordonnées choisi.
On dispose ainsi d'une formulation naturelle du principe d'équivalence…
Ce ne sont pas aux éléments différentiels des coordonnées (qui sont de simples paramètres mathématiques), mais seulement à la métrique de Riemann qui leur est associée qu'il faut attribuer une signification physique" Conférence Glasgow 1933
Notons qu' il aura fallu 3 ans à Einstein pour admettre cette conclusion que les coordonnées ne sont qu’un moyen de décrire qui n’a rien à voir avec les objets à décrire. Cet état de chose n’est pleinement pris en compte que par une formulation généralement covariante des lois de la nature. Toute autre méthode mélange moyen de description et objet à décrire d’ou confusion.

Une des conséquences est la difficulté de définir les paramètres (position, vitesse etc..) des objets très éloignés.
Dans un espace de type riemannien ou le référentiel galiléen est défini localement, les concepts développés par Einstein pour arpenter et synchroniser un référentiel ne s'appliquent que localement . Comment prolonger ce référentiel local jusqu'aux points éloignés de l'univers auxquels on veut se "connecter" pour faire des mesures physiques, comparaisons par coïncidence de points évènements des deux référentiels. (la métrique dépend de nombreux paramètres, le temps ne s'écoule pas partout de la même façon, la non linéarité est la règle)
En RR pas de problème la transformation de Lorentz étant linéaire tout le référentiel est balisé en espace et en heure (on définit le synchronisme). On peut alors faire coïncider les points évènements de deux référentiels quelque soit leur position dans le référentiel même très éloignés, car il y aura un point du référentiel au contact dont la position spatio-temporelle est définie par rapport à l'observateur .On n'a rien de tel en RG. Tout ceci pour dire que le mouvement de récession apparent des galaxies lié à l'expansion n'est nullement en contradiction avec la limite de vitesse de la RR. Même pour les formulations les plus récentes de la RG (dans un formalisme commun à la mécanique quantique et à la théorie des cordes),ce point est hors du cadre de leur portée, ce qui fait dire que la question est grammaticalement incorrecte.

13- Conclusion

A partir de deux hypothèses très simples (comme en RR)

- Généralisation du principe de Relativité aux systèmes non inertiels
- Principe d'équivalence

Einstein ramène la gravitation à un problème cinématique par le principe d'équivalence.
L'espace de Minkowski ou la RR s'applique est un des référentiels les autres s'obtenant par "simple" changement de coordonnées.
Pour satisfaire au principe de Relativité les équations doivent garder la même forme quel que soit le référentiel.
Compte tenu du type de changement de coordonnées , pour satisfaire à ce critère les équations doivent être écrites sous forme d'équations entre tenseurs covariants.

Elle se réduit à une seule équation d'apparence très simple (en fait très synthétique puisque une égalité tensorielle suppose l'égalité de toutes ses composantes), mais très complète.

R=T

qui signifie que localement la géométrie de l'espace-temps (cf Relativité Restreinte) est conditionnée par l'énergie (sous toutes ses formes , cf RR) localement présente.

C'est en fait une théorie de la gravitation.
Le concept révolutionnaire *(se rappeler la révolution héliocentrique de Galilée, contre les apparences*) exposé par EINSTEIN est que la gravitation n'est pas une force comme NEWTON l'entendait mais la conséquence de la géométrie de l'espace temps. Les corps qui suivent des trajectoires courbes au voisinage de masses (s'ils ne sont soumis à aucune autre influence), ne font que suivre les géodésiques (chemins naturels de moindre effort) de l'espace temps.

Ceci rend bien compte que cette trajectoire est indépendante de la masse du corps , de sa nature et de sa forme

Cette théorie , force l'admiration par sa puissance synthétique, et l'audace de ses concepts en même temps que par la limpidité des idées développées.
Elle est la grande théorie rationaliste du vingtième siècle (la mécanique quantique étant en rupture avec le rationalisme) Elle prédit des phénomènes qui débordent son champ d'action (force ou faiblesse ?)

Pour autant elle n'est pas une théorie du passé, comme le montre les découvertes récentes prédites.

La formulation moderne de la RG dans un langage commun à la mécanique quantique déduit l'équation de la RG, non pas d'une généralisation de l'équation de Poisson, mais comme conséquence du *principe de moindre action* *caractérisée par le Lagrangien :

$S_H = \int d^n x.\ L_H$, avec L_H (densité de Lagrangien) = $(-g)^{1/2}$. R avec « g » déterminant du tenseur métrique et R scalaire de Ricci dérivant par contraction successives du tenseur de Riemann contenant les informations de courbure, et extremum sur la trajectoire.(cf ref 12)

On sait que la Lagrangien , notion de mécanique classique (Energie potentielle - Energie cinétique :L= 1/2m($px^2+py^2+pz^2$) -U (x, y,z) à son équivalent en mécanique quantique par l'intermédiaire d' opérateurs ($i\partial/\partial x$ etc..) agissant sur la fonction d'onde ψ permettant une quantification.

Ce Lagrangien très simple peut être généralisé dans différentes directions permettant de généraliser la théorie .

**** Hilbert avait déduit l'équation de la Gravitation par cette méthode, en s'appuyant sur les travaux d'Einstein à peu près en même temps qu'Einstein.***

Généralisation du Lagrangien *:*

- ***La Constante cosmologique : $L_H = (-g)^{1/2}. (R - \Lambda)$ qui conduit par calcul de quantification de l'énergie du vide, $2\pi. E0 = ½ h\omega$ à $\Lambda \sim m^4_p$ avec m_p = masse de Planck (valeur astronomique de cette constante, en désaccord énorme avec l'observation).***
-
- ***On peut aussi introduire des ordres supérieurs à 2 dans la dérivée de la métrique (difficultés liées au conditions initiales et à la Re-normalisation déjà pas résolue avant, et qui se complexifie encore)***
- ***On peut introduire des tenseurs dans le Lagrangien qui conduit à une variation de la « constante G » dans le temps.***
- ***On peut considérer le cas d'une torsion non nulle (ne change pas la forme des équations)***
- ***Etc..***
-

Enfin la **« géométrisation » de la théorie** (la RG rentre dans la classe des théories qui n'ont pas de coordonnées préférentielles) permet d'en élargir la portée et débouche sur la théorie des supercordes développée dans ce même cadre rationaliste et qui est une tentative d'unification des grandes théories modernes.

14- Références Bibliographiques

(1) Encyclopédie Univervalis (Relativité générale)**
(2) Albert Einstein , Oeuvres choisies Vol 2 (Relativité 1) Seuil /CNRS***
(3) Albert Einstein , Oeuvres choisies Vol 3 (Relativité 2) Seuil /CNRS***
(4) Cosmology and Particle astrophysics (lars Bergström) Wiley***
(5) Les trois étapes de la Cosmologie (J. Merleau Ponty, Bruno Morando) Laffont*
(6) Astronomie & Astrophysique (Marc Séguin, Benoît Villeneuve) Masson*
(7) http://math.ucr.edu/home/baez/gr/outline2.html*
(8) Notes de cours d'analyse tensorielle (INSA Lyon 1966)**
(9) Temps ,Espace , Matière , Leçons sur la théorie de la Relativité Générale (Herman Weyl - 1922) . Blanchard****
(10) Les trois premières minutes de l'univers . (S. Weinberg)Seuil*
(11) La nature de l'espace et du temps (S.Hawking R. Penrose) Gallimard****
(12)http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/march01/Carroll3/Carroll01.html****
(13) http://cdfinfo.in2p3.fr/culture/Cosmologie**
(14) Introduction à la relativité générale (Luc Blanchet)***

* facile
** moyen
*** difficile
****très difficile

15 – Glossaire

Approximation Newtonienne
Approche Contemporaine
Connexion métrique
Constante Cosmologique
Coordonnées curvilignes
Densité de tenseur
Dérivée covariante
Equation géodésique
Equation d'Einstein
Equation Poisson
Equation Maxwell
Espace Euclidien
Espace Riemannien
Expansion Univers
Fondement de la Relativité générale
Formalisme moderne
Hamiltonien
Horizon des évènements
Hypersphère