

<http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/> : J. Fric endosse toute responsabilité pour les erreurs que sa traduction (qui n'a pas été vérifiée par l'auteur) aurait pu ajouter. En cas de doute, veuillez vous rapporter à la version originale.

2. Variétés différentiables	3
Généralités	3
Définition intuitive de la notion de variété	3
Exemples de Variétés:	3
Contre exemples	4
Applications sur les variétés	5
Composition d'applications.....	5
Applications injectives, surjectives	6
Domaine d'une application	6
Image, pré image d'une application	7
Applications bijectives.....	7
Continuité d'une application	7
Difféomorphisme	7
Règle de chaînage:.....	8
Ensembles ouverts	9
Système de coordonnées.....	9
Atlas	10
Définition d'une Variété.....	10
Exemple de systèmes de coordonnées	11
Différentiation.....	13
Vecteurs sur la variété	13
Espace tangent	14
Vecteurs tangents.....	14
Les vecteurs sont des dérivées	14
Dérivée directionnelle.....	14
Les dérivées directionnelles forment un espace vectoriel	15
Bases de coordonnées	15
Loi de transformation des vecteurs	17
Vecteur dual d'une variété	18
Loi de transformation d'un vecteur dual	18
Tenseurs sur les variétés	19
Loi de transformation d'un Tenseur	19
Modifications liées à la généralisation des opérations tensorielles dans un espace de	

Minkowski à une Variété différentiable quelconque.....	20
Les dérivées partielles ne sont pas des tenseurs	20
Le tenseur métrique	21
L'intervalle d'espace temps généralisé	22
Forme canonique de la métrique.....	23
Signature, rang de la métrique	24
Métriques euclidiennes, riemaniennes, lorentziennes, indéfinies.....	24
Coordonnées localement inertielles	24
Détermination de l'espace tangent en un point	24
Le cas du tenseur de Levi-Civita	26
Le symbole de Levi-Civita	26
La densité de Tenseur	26
Poids d'une densité de tenseur, Jacobien	27
Volumes et intégration dans une Variété.....	27
Le théorème de Stokes en point d'orgue	29

2. Variétés différentiables

Généralités

Après sa publication de la théorie de la relativité restreinte, Einstein s'est essayé, sans succès à mettre au point une théorie de la gravitation invariante sous une transformation de Lorentz. La vraie rupture a consisté à remplacer l'espace de Minkowski par un espace courbe, dont la courbure est générée par l'énergie et la matière et réagit avec elle.

Pour explorer cette voie plus avant, nous devons acquérir les connaissances mathématiques relatives à ces espaces courbes. Nous allons d'abord nous intéresser aux Variétés en général et puis étudier plus spécifiquement les propriétés mathématiques des espaces courbes dans le chapitre suivant. Pour la généralité nous nous référerons à des espaces à "N" dimensions encore que pour notre application $N=4$.

Définition intuitive de la notion de variété

Une Variété (ou quelquefois Variété différentiable) est un des concepts les plus fondamentaux en mathématiques et en physique. Nous connaissons les propriétés de l'espace Euclidien à n dimensions, \mathbb{R}^n , qui est l'ensemble des n -tuples (x^1, \dots, x^n) .

La notion de Variété reflète l'idée que l'espace peut être courbe et avoir une Topologie compliquée, mais qu'il peut être assimilé localement à \mathbb{R}^n .

Assimilé ne signifie pas que la métrique est la même, mais que les notions de base de l'analyse comme ensembles ouverts, fonctions et coordonnées sont les mêmes. La Variété complète est alors reconstituée en raccordant sans discontinuité toutes ces régions locales.

Exemples de Variétés:

\mathbb{R}^n lui-même incluant la ligne \mathbb{R} , le plan \mathbb{R}^2 , etc.....

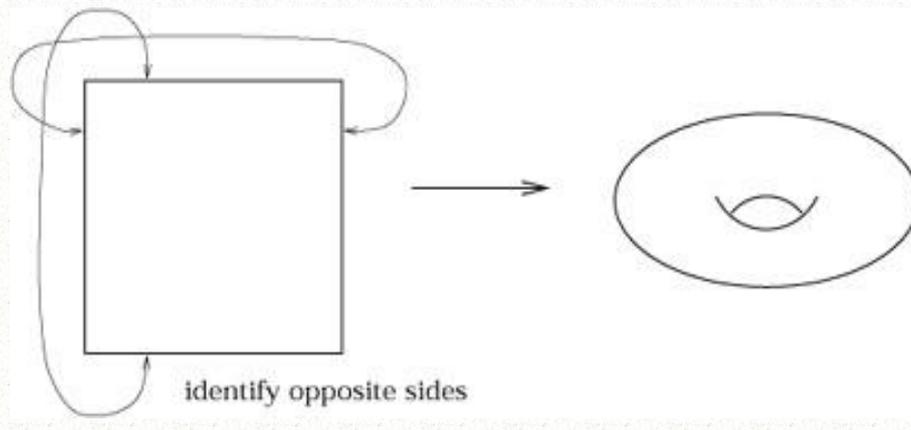
Il est évident que \mathbb{R}^n ressemble localement à lui même en tout point et pour cause!

L'hypersphère de dimension n , S^n , définie comme le lieu des points à distance constante d'un point (centre) dans un espace à \mathbb{R}^{n+1} dimensions.

Le cercle et la sphère 2D sont parmi les exemples favoris de Variétés.

L'Hyper-Tore T^n de dimension n qui est obtenu à partir d'un hypercube de dimension n en joignant les faces opposées.

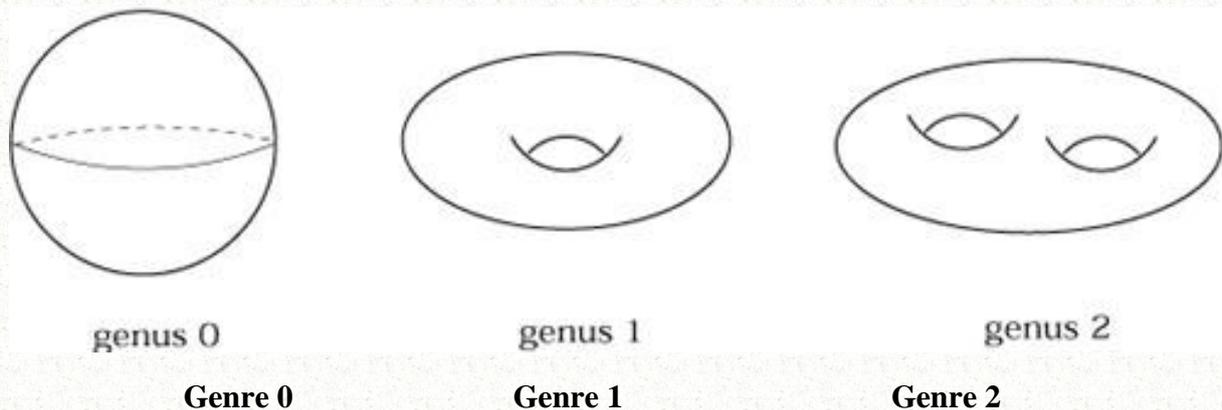
Le tore traditionnel (chambre à air) est obtenu à partir d'un carré par exemple comme suit:



Une surface de Riemann de genre g est un Tore-2D avec g trous au lieu d'un.

S^2 est une surface de Riemann de genre zéro.

Toute Variété compacte, orientable (qui possède des "(hyper)faces" disjointes) et sans bords de dimension deux est une surface de Riemann d'un genre dépendant de sa topologie (nombre maximum de coupures indépendantes qu'on peut opérer tout en respectant la connexité : un seul morceau).



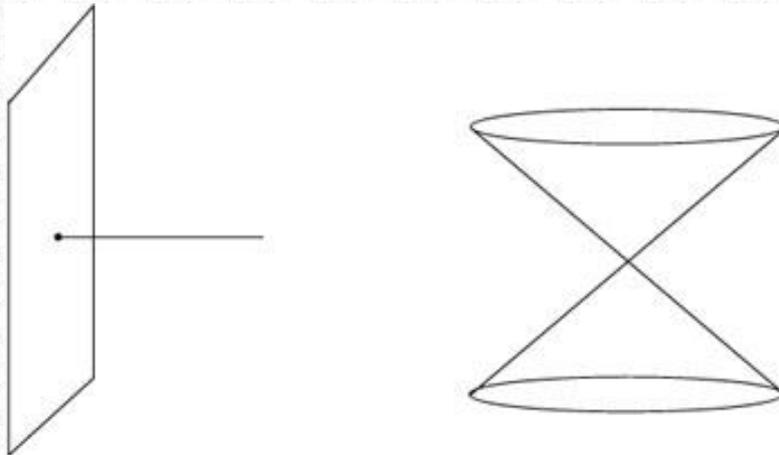
De façon plus abstraite, un ensemble comme les rotations dans \mathbb{R}^n forment une variété. Les groupes de Lie sont des Variétés munies en plus d'une structure de groupe.

Le produit de deux variétés est une Variété. Etant donné 2 variétés M et M' de dimension n et n' , nous pouvons construire une Variété $M \times M'$, de dimension $n + n'$, constituée des paires ordonnées (p, p') pour tout $p \in M$ et $p' \in M'$.

Contre exemples

Défini ainsi la notion de Variété semble ratisser large. Y a-t'il des choses qui ne soient pas des Variétés ? Tout plein! Tout ce qui ne ressemble pas localement à \mathbb{R}^n , par exemple la ligne unidimensionnelle coupant un plan et deux cônes réunis par leur sommets (Un seul cône est une

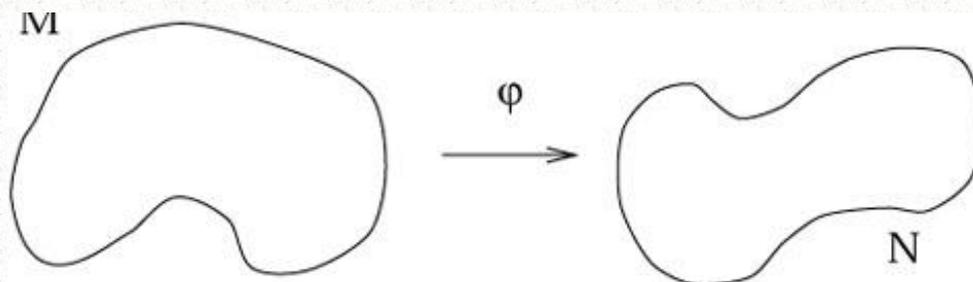
variété si on exclut le sommet).



Définissons rigoureusement la Variété. Nous avons besoin de quelques définitions préliminaires. La plupart sont assez claires, mais nous nous devons d'être complets.

Applications sur les variétés

La notion la plus élémentaire est celle d'application entre deux ensembles (de l'un vers l'autre appelé aussi une carte par analogie au fait qu'une carte est une application de ce type entre un objet "le territoire" et sa "représentation" sur une feuille de papier). La connaissance de la notion d'ensemble est supposée. Soit deux variétés M et N , une application $\Phi : M \rightarrow N$ est une relation qui fait correspondre à chaque élément de M , exactement un élément de N . Une application est une généralisation du concept de fonction. La figure canonique d'une application ressemble à ce qui suit :

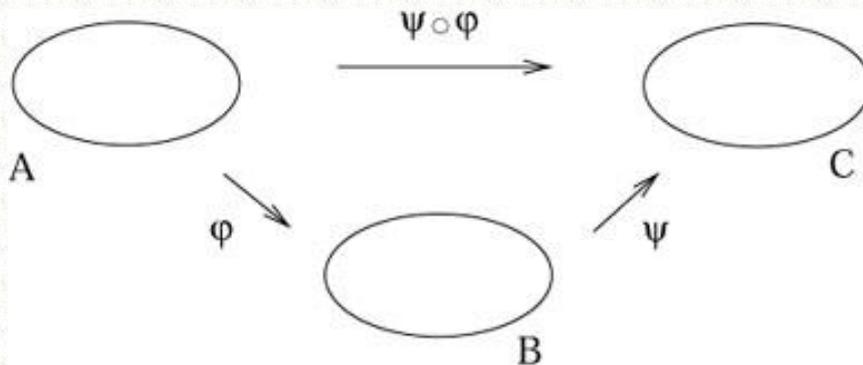


Composition d'applications

Etant donné deux applications $\Phi: A \rightarrow B$ et $\Psi: B \rightarrow C$, nous définissons la **composition** $\Psi \circ \Phi : A \rightarrow C$ par l'opération $\Psi \circ \Phi (a) = \Psi (\Phi (a))$. Si $a \in A$, $\Phi (a) \in B$, alors $(\Psi \circ \Phi)(a) \in C$.

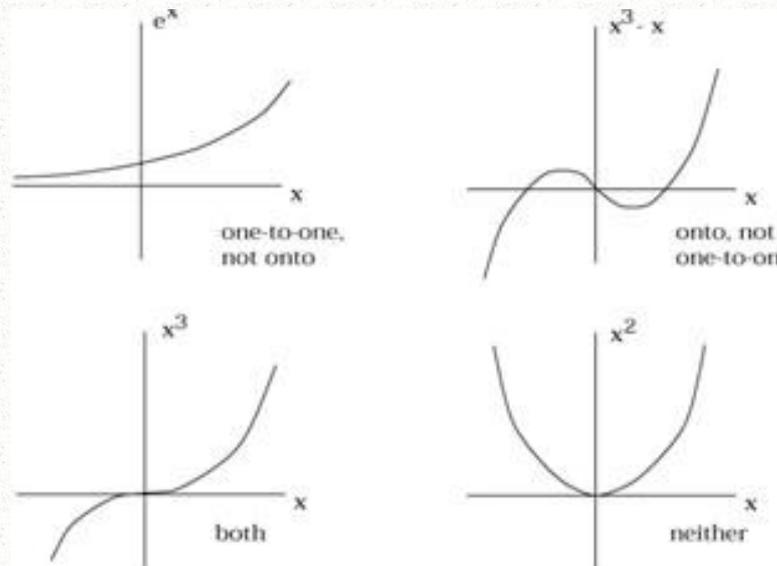
L'ordre des applications s'explique par le fait que la plus à droite agit en premier.

Illustré cela donne :



Applications injectives, surjectives

Une application Φ est appelée injective si chaque élément de N est au plus l'application d'un seul élément de M , et surjective si chaque élément de N est au moins l'application d'un élément de M .
 Considérons une fonction Φ de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Alors $\Phi(x) = e^x$ est injective mais pas surjective, $\Phi(x) = x^3 - x$ est surjective, mais pas injective et $\Phi(x) = x^3$ est les deux alors que $\Phi(x) = x^2$ n'est ni injective, ni surjective.



Domaine d'une application

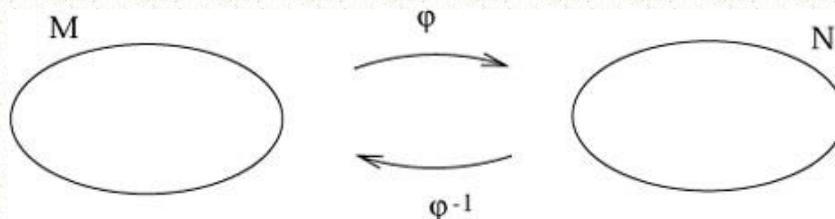
L'ensemble M est appelé le **domaine** de l'application Φ , et l'ensemble des points de N résultant de l'application sur M est appelé l'**image** de Φ .

Image, pré image d'une application

Pour un sous ensemble $U \subset N$, l'ensemble des éléments de M cartographiés par U est appelé la **pré-image** de U par Φ , ou $\Phi^{-1}(U)$.

Applications bijectives

Une application à la fois injective et surjective est appelée **bijective ou biunivoque**. Dans ce cas nous pouvons définir l'application inverse $\Phi^{-1} : N \rightarrow M$ par $(\Phi^{-1} \circ \Phi)(a) = a$. (Notons que le même symbole Φ^{-1} est utilisé pour la pré-image et l'application inverse, même si la première est toujours définie alors que la seconde n'est définie que dans certains cas. Alors :



Continuité d'une application

La notion de continuité d'une application entre espaces topologiques (donc de variétés) est en fait assez subtile. Nous n'en donnerons pas la formulation rigoureuse. Cependant les notions intuitives de continuité et par là de différentiation d'applications ϕ de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre espaces Euclidiens est très utile. Une carte de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ prend un m -tuple (x^1, x^2, \dots, x^m) et lui fait correspondre un n -tuple (y^1, y^2, \dots, y^n) , et peut à ce titre être considéré comme une liste de n fonctions ϕ^i de m variables:

$$\begin{aligned} y^1 &= \phi^1(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ y^2 &= \phi^2(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y^n &= \phi^n(x^1, x^2, \dots, x^m) . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous appellerons ces fonctions C^p , si elles sont continues et p -fois différentiables et appeler C^p la carte entière issue de l'application $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, si chacune des fonctions qui la composent est au moins de type C^p . Ainsi une carte C^0 est continue mais pas nécessairement différentiable alors qu'une carte C^∞ est continue et différentiable à l'infini. Les cartes C^∞ sont quelquefois appelées **lisses**.

Difféomorphisme

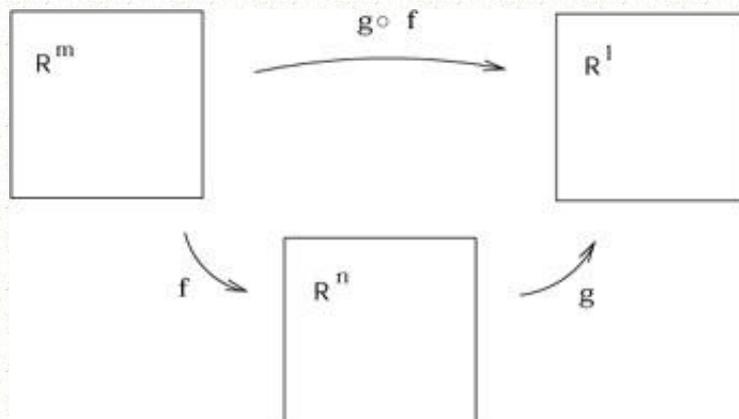
Nous dirons de deux ensembles qu'ils sont **difféomorphes** s'il existe une carte $\phi: M \rightarrow N$ de type C^∞ possédant une carte inverse $\phi^{-1}: N \rightarrow M$ de type C^∞ également. L'application ϕ est alors appelée un difféomorphisme.

La notion de difféomorphisme entre deux espaces ne s'applique qu'aux Variétés, ou la notion de différentiation résulte de leur ressemblance avec l'espace Euclidien \mathbb{R}^n du moins localement.

Cependant, nous pouvons également définir la continuité d'applications entre deux espaces topologiques (pas nécessairement des variétés). Nous dirons ces espaces "homéomorphes", ce qui veut dire topologiquement équivalents s'il existe une carte et son inverse toutes deux continues entre ces deux ensembles. Des espaces homéomorphes qui ne sont pas difféomorphes sont concevables, ils sont topologiquement équivalents mais munis de structures différentiables différentes. En 1964 Milnor a montré que S^7 avait 28 structures différentiables différentes. En fait pour $n < 7$ il n'y a qu'une structure différentiable sur S^n , alors que pour $n > 7$, le nombre s'accroît considérablement. \mathbb{R}^4 a un nombre infini de structures différentiables.

Règle de chaînage:

L'enchaînement d'applications $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ amène à définir la loi de composition $(g \circ f): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$



Nous pouvons représenter chaque espace par ses coordonnées: x^a sur \mathbb{R}^m , y^b sur \mathbb{R}^n , et z^c sur \mathbb{R}^l où les indices prennent les valeurs appropriées.

La règle de chaînage décrit la composition des dérivées partielles des applications composées.

$$\frac{\partial}{\partial x^a} (g \circ f)^c = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a} \frac{\partial g^c}{\partial y^b} \tag{2.2}$$

Soit en abrégé :

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^b} . \quad (2.3)$$

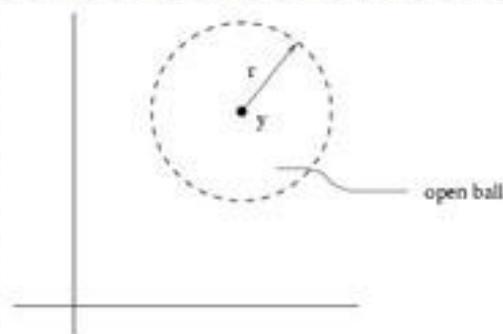
Nous pouvons utiliser cette formule *ad libitum*, mais essayons de découvrir sa relation avec les applications qui la sous tendent.

Rappelons nous que si $m=n$ le déterminant de la matrice $\partial y^b / \partial x^a$ est appelé le **jacobien** de l'application, et que l'application est inversible (la matrice possède un inverse) si le jacobien n'est pas nul. Ces définitions doivent vous être familières, même si elles sont un peu lointaines. Nous allons les utiliser dans le cadre de la définition rigoureuse d'une Variété. Curieusement, une procédure un peu particulière est nécessaire pour formaliser cette notion intuitive.

Ensembles ouverts

Nous devons d'abord définir un ensemble ouvert, que nous allons munir d'un système de coordonnées et après nous allons devoir raccorder ces ensembles ouverts d'une certaine façon.

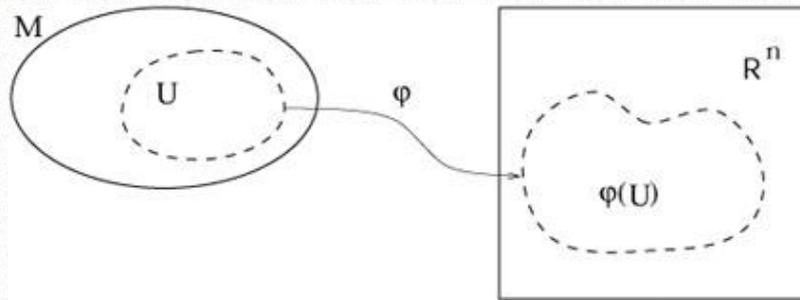
Commençons par une n -sphère ouverte qui est l'ensemble des points x de \mathbf{R}^n tels que $|x - y| < r$ pour une valeur fixe de $y \in \mathbf{R}^n$ et $r \in \mathbf{R}$, où $|x - y| = [\sum_i (x^i - y^i)^2]^{1/2}$. Notons que l'inégalité est stricte, la n -sphère ouverte est l'intérieur de la n -sphère de rayon r centrée à y .



Un ensemble ouvert de \mathbf{R}^n est un ensemble constitué de l'union d'un nombre arbitraire (jusqu'à l'infini) de n -sphères ouvertes. En d'autres termes, $V \subset \mathbf{R}^n$ est ouvert si quel que soit $y \in V$, il y a une n -sphère ouverte centrée à y qui est complètement incluse dans V . En gros, un ensemble ouvert est l'intérieur d'une surface fermée de dimension $(n - 1)$ où l'union de plusieurs intérieurs de ce type. En définissant la notion d'ensemble ouvert nous avons muni \mathbf{R}^n d'une topologie, dans ce cas d'une topologie à métrique standard.

Système de coordonnées

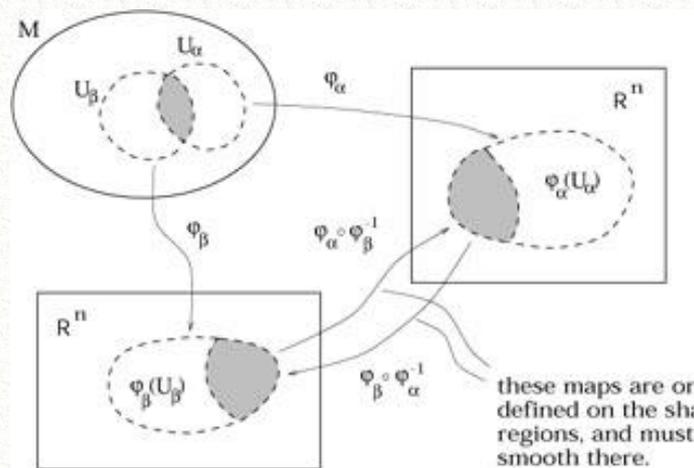
Un **système de coordonnées** consiste en un sous ensemble U d'un ensemble M , associé à une carte injective $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$, telle que l'image de $\phi(U)$ est ouverte dans \mathbf{R}^n . Chaque carte est surjective vis à vis de son image, ainsi la carte $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ est inversible. Nous pouvons alors dire que U est un ensemble ouvert dans M . (Nous avons alors muni M d'une topologie, bien que nous ne développerons pas ce point).



Atlas

Un **atlas** de type C^∞ est une liste indexée de systèmes de coordonnées $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ qui remplit deux conditions:

1. L'union de U_α est égale à M : la couverture des U_α est M .
2. Les systèmes de coordonnées sont assemblés sans raccords. Plus précisément si deux systèmes de coordonnées se recouvrent, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, alors la carte $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$ applique surjectivement les points de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ sur $(\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$, et toutes ces cartes doivent être partout où elles sont définies de type C^∞ . Ceci est plus clair sur la figure suivante :



Ainsi nous avons défini un système de coordonnées sur un ensemble ouvert et un atlas qui est un système de systèmes de coordonnées où les recouvrements sont réunifiés par une application bijective (fonction de transition) entre les deux images des même points..

Définition d'une Variété

Enfin, une **Variété** de dimension n de type C^∞ (variété n en abrégé) est simplement un ensemble M muni d'un atlas maximum, qui contient tous les systèmes de coordonnées compatibles possibles.

Nous pouvons remplacer C_∞ par C^p dans nos définitions précédentes. Pour notre propos, le niveau de différentiation d'une Variété n'est pas critique, nous supposons qu'il est aussi différentiable que nécessaire à notre application.

La contrainte d'atlas maximum permet d'éviter que deux espaces équivalents qui seraient munis d'atlas différents ne soient comptés comme deux variétés différentes. Cette définition formalise la notion d'ensemble assimilable localement à \mathbb{R}^n .

Nous aurons rarement à faire appel à l'intégralité de la définition, mais rigueur oblige.

Un point intéressant dans notre définition est qu'elle ne fait pas appel à l'imbrication de la Variété dans des espaces Euclidiens de dimension supérieures. En fait toute Variété de dimension n peut être imbriquée dans \mathbb{R}^{2n} (Théorème d'imbrication de Whitney) et nous utiliserons quelquefois cette propriété (comme pour la définition de la sphère précédemment).

Mais il est important de noter que la Variété existe indépendamment de toute imbrication.

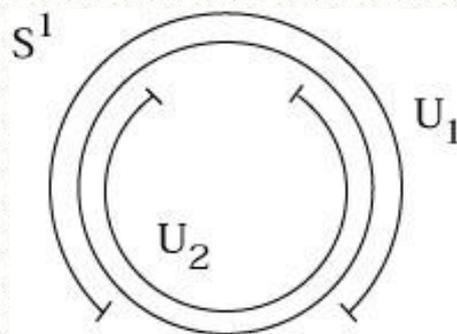
Nous n'avons aucune raison de penser que l'espace-temps à quatre dimensions est imbriqué dans un espace plus grand.

Les théoriciens des cordes pensent que notre Univers est une partie d'univers à dix, voire onze dimensions d'espace temps, mais cela ne change rien à l'affaire si nous ne considérons que les quatre dimensions d'espace temps habituelles.

Exemple de systèmes de coordonnées

Pourquoi est-il nécessaire de faire toute cette gymnastique avec les systèmes de coordonnées, leurs recouvrements, alors qu'il paraîtrait plus simple de couvrir chaque Variété avec un seul système de coordonnées. La raison est que beaucoup de Variétés ne peuvent pas être couvertes avec un seul système de coordonnées. Prenons l'exemple le plus simple S^1 .

Il y a un système de coordonnées classique, $\theta: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, où $\theta=0$ au sommet du cercle et s'enroule autour jusqu'à 2π . Dans la définition d'un système de coordonnées, nous avons imposé à l'image $\theta(S^1)$ d'être ouverte dans \mathbb{R} . Si nous incluons soit $\theta=0$ soit $\theta=2\pi$, nous avons un intervalle fermé au lieu d'ouvert. Si nous excluons les deux points, nous ne couvrons pas tout le cercle. Donc nous avons besoin de deux systèmes de coordonnées, comme montré ci dessous.

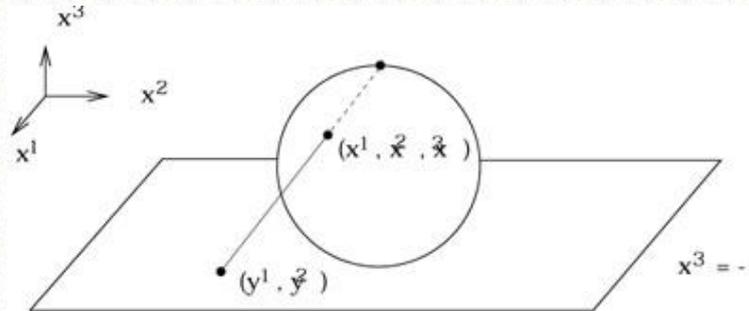


Un exemple un peu plus compliqué est représenté par la sphère S^2 , où de nouveau un système de

coordonnées unique ne pourra pas couvrir la Variété entière.

Une projection de Mercator ignore les pôles nord et sud (ainsi que la ligne de changement de date qui implique le même problème que celui soulevé pour S^1 avec θ).

Considérons S^2 comme l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 défini par $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Nous pouvons construire un système de coordonnées d'un ensemble ouvert U_1 , défini comme la sphère sauf le pôle nord, via une projection "stéréographique":



Alors, nous traçons une ligne droite du pôle Nord vers le plan défini par $x^3 = -1$, qui coupe S^2 comme indiqué sur la figure et le plan aux coordonnées cartésiennes (y^1, y^2) . La carte est donnée explicitement par :

$$\phi_1(x^1, x^2, x^3) \equiv (y^1, y^2) = \left(\frac{2x^1}{1-x^3}, \frac{2x^2}{1-x^3} \right). \quad (2.4)$$

Vous pouvez facilement vérifier cette formule (je l'ai fait) Un autre système de coordonnées (U_2, Φ_2) est obtenu de façon symétrique en projetant depuis le pôle sud la sphère sur le plan défini $x^3 = +1$. Les coordonnées résultantes couvrent la sphère moins le pôle sud et sont données par :

$$\phi_2(x^1, x^2, x^3) \equiv (z^1, z^2) = \left(\frac{2x^1}{1+x^3}, \frac{2x^2}{1+x^3} \right). \quad (2.5)$$

Ensemble ces deux systèmes de coordonnées couvrent la Variété complète, en se recouvrant sur la région $-1 < x^3 < +1$. Ce que vous pouvez également vérifier est que la composition $\Phi_2 \circ \Phi_1$ est donnée par

$$z^i = \frac{4y^i}{[(y^1)^2 + (y^2)^2]}, \quad (2.6)$$

est du type C^∞ dans la région du recouvrement

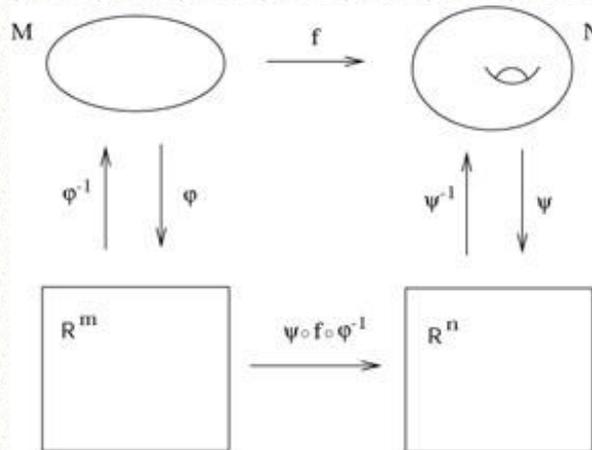
Tant que nous restons dans cette région, (2.6) apparaît comme un changement de coordonnées.

Nous voyons alors la nécessité des systèmes de coordonnées et des atlas : beaucoup de Variétés ne peuvent pas être couvertes par un seul système de coordonnées (bien que ce soit possible pour certains, même munies de topologies particulières).

Variétés différentielles Topologiques: Jacques Fric Mars 2002 : traduction d'après " lecture notes on General Relativity" de Sean M Carroll : <http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/>

Est-il possible d'imaginer un simple mais bon système de coordonnées couvrant le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$?

Néanmoins, il est souvent pratique de travailler avec un seul système de coordonnées et de noter les points qui en sont exclus. Le fait que les variétés se comportent localement comme \mathbb{R}^n , ce qui se manifeste par la construction des systèmes de coordonnées, introduit la possibilité d'analyse sur les variétés, par des opérations telles que la différentiation et l'intégration. Considérons deux variétés M et N de dimensions m et n , avec des systèmes de coordonnées Φ sur M et Ψ sur N . Imaginons que nous avons une fonction $f: M \rightarrow N$,



Différentiation

Considérons M et N comme des ensembles, nous ne pouvons pas différencier l'application f , car nous ne savons pas ce que cette opération signifie. Mais les systèmes de coordonnées vont nous permettre de construire l'application $(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, (où l'application est définie bien sûr et où c'est approprié!).

C'est juste une application entre espaces Euclidiens et tous les concepts du Calcul avancé s'appliquent. Par exemple f , considéré comme une fonction à n arguments sur M , peut être différenciée pour obtenir $\partial f / \partial x^\mu$, où x^μ représente \mathbb{R}^m . Remarquons que cette notation est abrégée et si on développe on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^\mu) . \tag{2.7}$$

Il serait lourd d'écrire l'application détaillée explicitement en permanence. La notation abrégée sera suffisante la plupart du temps.

Vecteurs sur la variété

Ayant établi ces bases, nous pouvons maintenant introduire différentes sortes de structures sur les Variétés. Commençons par les vecteurs et les espaces tangents. Dans notre exposé sur la Relativité restreinte, nous étions restés vagues sur la définition des vecteurs et leur relation avec

l'espace temps.

Espace tangent

Nous avons insisté sur la notion d'espace tangent, ensemble de tous les vecteurs en un point de l'espace temps. La raison en était que l'idée d'un vecteur s'étendant entre deux points de l'espace ne s'appliquait pas à ce cas, mais qu'un vecteur pouvait être considéré comme un objet associé à un point.

Cette définition nous fait temporairement abandonner des notions concrètes comme "le vecteur pointe dans la direction des x " puisque l'espace tangent est simplement un espace vectoriel en chaque point, ce qui est assez abstrait. Il est temps de remédier à cela. Imaginons que nous voulions construire l'espace tangent en un point p d'une Variété M en n'utilisant que des choses intrinsèques à M , (sans l'imbriquer dans des espaces de dimensions supérieures etc..).

Vecteurs tangents

Notre première idée serait d'utiliser notre connaissance intuitive qu'il y a des objets appelés "vecteurs tangents à des courbes" qui appartiennent à l'espace tangent.

Si nous considérons l'ensemble de toutes les courbes paramétrées passant par p qui est l'espace de toutes les cartes (non dégénérées) $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow M$, telles que p est dans l'image de γ .

On est tenté de définir l'espace tangent comme généré par tous les vecteurs tangents à ces courbes en p .

Les vecteurs sont des dérivées

C'est brûler les étapes car, l'espace tangent T_p est supposé être l'espace de tous les vecteurs en p , et avant de l'avoir défini, nous n'avons pas de notion indépendante de ce qu'est un vecteur tangent à une courbe. Dans un système de coordonnées x^μ , une courbe quelconque passant par p définit un élément de \mathbf{R}^n spécifié par n nombres réels $dx^\mu/d\lambda$ (où λ est un paramètre le long de la courbe), mais cette carte dépend manifestement des coordonnées, ce qui n'est pas ce que nous recherchons. Néanmoins, nous sommes sur la bonne voie, nous devons juste rendre ceci indépendant des coordonnées. A cette fin nous définissons l'espace de toutes les fonctions régulières \mathcal{F} sur M (soit, cartes de type C^∞ $f: M \rightarrow \mathbf{R}$).

Dérivée directionnelle

Ensuite nous remarquons que chaque courbe passant par p définit un opérateur sur cet espace, la dérivée directionnelle, qui réalise l'application $f \rightarrow df/d\lambda$ (en p). Nous allons revendiquer la chose suivante: *l'espace tangent T_p peut être identifié à l'espace des opérateurs de dérivées directionnelles le long des courbes passant par p .*

Pour l'établir nous devons démontrer deux choses, d'abord que l'espace des dérivées directionnelles est un espace vectoriel et ensuite qu'il est l'espace que nous cherchons (qu'il a la même dimension que M , qu'il produit l'idée naturelle de vecteurs pointant dans une certaine direction, et ainsi de suite).

Les dérivées directionnelles forment un espace vectoriel

La première assertion, les dérivées directionnelles forment un espace vectoriel semble assez immédiate. Imaginons deux opérateurs $d/d\lambda$ et $d/d\eta$ représentant les dérivées le long de deux courbes passant par p .

Nous n'avons aucun problème pour les additionner et les multiplier par des nombres réels, pour obtenir un nouvel opérateur $a.d/d\lambda + b.d/d\eta$. Il n'est pas évident que ces espaces soient fermés c'est-à-dire que l'opérateur résultant soit lui même un opérateur de dérivation.

Un opérateur de dérivation correct doit agir linéairement sur les fonctions, et obéir à la loi de Leibnitz pour le produit des fonctions. Notre nouvel opérateur est manifestement linéaire, donc nous devons vérifier qu'il suit la loi de Leibnitz. Nous avons

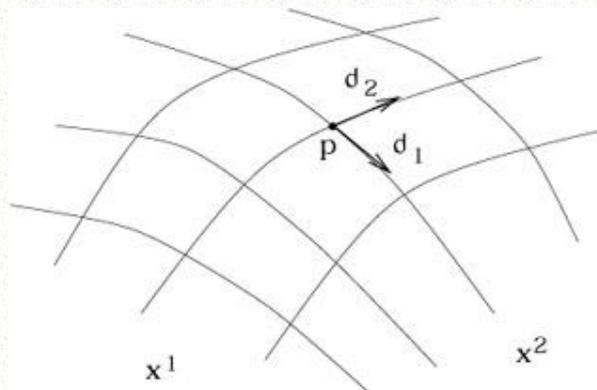
$$\begin{aligned} \left(a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\eta} \right) (fg) &= af \frac{dg}{d\lambda} + ag \frac{df}{d\lambda} + bf \frac{dg}{d\eta} + bg \frac{df}{d\eta} \\ &= \left(a \frac{df}{d\lambda} + b \frac{df}{d\eta} \right) g + \left(a \frac{dg}{d\lambda} + b \frac{dg}{d\eta} \right) f . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ainsi que nous l'espérons la règle du produit est satisfaite, l'ensemble des dérivées directionnelles est bien un espace vectoriel.

Est bien l'espace vectoriel que nous voudrions identifier à l'espace tangent ?

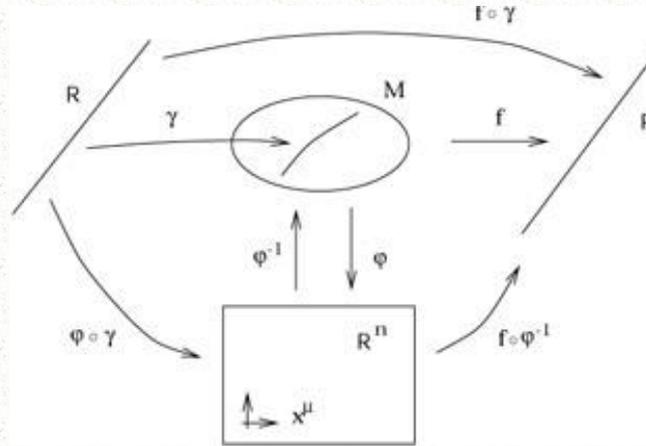
Bases de coordonnées

La meilleure façon de s'en convaincre est de trouver une base pour cet espace. Considérons de nouveau un système de coordonnées x^μ . Alors il y a un ensemble évident de n dérivées directionnelles en p , nommément les dérivées partielles ∂_μ en p .



Nous allons maintenant déclarer que les opérateurs de dérivée partielle ∂_μ en p forment une base pour l'espace tangent T_p . Il s'ensuit que cet espace T_p est de dimension n qui est le nombre de

vecteurs de base. Nous allons montrer que toute dérivée directionnelle est peut être décomposée en une somme pondérée par des nombres réels de dérivées partielles. C'est l'expression bien connue des composantes d'un vecteur tangent, mais regardons du point de vue de notre approche formelle. Considérons une Variété M , de dimension n , un système de coordonnées $\Phi : M \rightarrow \mathbf{R}^n$, une courbe $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ et une fonction $f : M \rightarrow \mathbf{R}$. Ceci conduit à la combinaison d'applications suivantes :



Si λ est le paramètre le long de γ nous désirons exprimer l'opérateur vecteur $d/d\lambda$ en termes de dérivées partielles, ∂_μ . En utilisant la règle de chaînage (2.2) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} f &= \frac{d}{d\lambda} (f \circ \gamma) \\
 &= \frac{d}{d\lambda} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)] \\
 &= \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} \\
 &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f .
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

La première ligne reprend simplement l'expression informelle du membre de gauche et la réécrit sous forme de dérivée de la fonction $(f \circ \gamma) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. La deuxième ligne s'appuie sur la définition de l'application inverse Φ^{-1} (et sur l'associativité de l'opérateur de composition). La troisième relate la règle de chaînage (2.2) et la dernière reprend la notation informelle du départ. Comme la fonction f est quelconque, nous avons :

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu .
 \tag{2.10}$$

Nous en concluons que les dérivées partielles ∂_μ représentent une base valide de l'espace vectoriel des dérivées directionnelles, que nous pouvons valablement identifier à l'espace tangent.

Certes, le vecteur représenté par $d/d\lambda$ est une vieille connaissance, le vecteur tangent à la courbe de paramètre λ . Alors (2.10) n'est que la réaffirmation de (1.24), où nous disions que les composantes du vecteur tangent était simplement $dx^\mu/d\lambda$. La différence est que nous travaillons maintenant sur une variété quelconque et que nous avons défini nos vecteurs de base comme

étant $\hat{e}(\mu) = \partial_\mu$.

Cette base particulière ($\hat{e}(\mu) = \partial_\mu$) est appelée une base de coordonnées pour T_p ; C'est la formalisation du concept de vecteurs de base pointant dans la direction des axes de coordonnées.

Il n'y a aucune raison de se limiter aux bases de coordonnées pour les vecteurs tangents, nous pouvons utiliser des bases orthonormées, par exemple, si cela se révèle plus approprié. Toutefois le système de base de coordonnées se révèle être simple et naturel et nous l'utiliserons extensivement tout au long de ce cours.

Loi de transformation des vecteurs

Un des avantages de la démarche abstraite que nous avons suivi pour les vecteurs est que la loi de transformation est immédiate. Comme les vecteurs de base sont $\hat{e}(\mu) = \partial_\mu$, les vecteurs de base dans un nouveau système de coordonnées $x^{\mu'}$ sont données par la règle de chaînage (2.3) par

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (2.11)$$

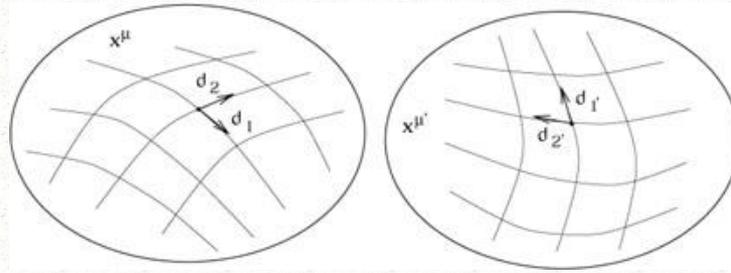
Nous pouvons obtenir la loi de transformation par la même méthode qu'en espace plat, en exigeant que le vecteur $V = V^\mu \partial_\mu$ soit invariant par un changement de coordonnées : Nous avons :

$$\begin{aligned} V^\mu \partial_\mu &= V^{\mu'} \partial_{\mu'} \\ &= V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Et en conséquence, comme la matrice $\partial x^{\mu'} / \partial x^\mu$ est l'inverse de la matrice $\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$,

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu. \quad (2.13)$$

Comme nous n'écrivons pas explicitement en général la base des vecteurs, la règle (2.13) de transformation des composantes est appelée "loi de transformation des vecteurs". Remarquons la compatibilité avec la loi de transformation des composantes des vecteurs en RR par une transformation de Lorentz, $V^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \cdot V^\mu$, du fait que la transformation de Lorentz est une sorte particulière de transformation de coordonnées avec $x^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \cdot x^\mu$. Mais (2.13) est beaucoup plus général, car il inclut le comportement des vecteurs par des changements quelconques de coordonnées et donc de bases, pas seulement les transformations linéaires. Comme d'habitude nous insistons sur la distinction ontologique subtile entre un changement de coordonnées qui ne change pas les composantes d'un tenseur et un changement de base dans l'espace tangent qui lui les change, mais comme nous avons décidé d'utiliser les coordonnées pour définir la base, un changement de coordonnées change la base :



Vecteur dual d'une variété

En ayant terminé avec les vecteurs, nous nous intéressons maintenant aux vecteurs duaux, comme nous l'avons fait pour l'espace plat. De nouveau l'espace cotangent T_p^* est l'ensemble des formes linéaires $\omega: T_p \rightarrow \mathbf{R}$. L'exemple canonique d'une forme monolinéaire est le gradient d'une fonction f , dénotée df . Son action sur un vecteur $d/d\lambda$ produit la dérivée directionnelle de la fonction:

$$df \left(\frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{df}{d\lambda}. \quad (2.14)$$

On peut se demander si la fonction ne peut pas être considérée elle-même comme une forme monolinéaire, et $df/d\lambda$ étant son action. Le hic est qu'une forme monolinéaire n'existe qu'au point où elle est définie et ne dépend en rien des autres points de M . Si nous connaissons une fonction au voisinage d'un point nous pouvons définir sa dérivée, mais cela n'est pas possible si nous ne connaissons que la valeur en ce point. Le gradient contient toute l'information permettant de calculer la dérivée le long de n'importe quelle courbe passant par p , remplissant ainsi son rôle de vecteur dual.

De la même manière que les dérivées partielles par rapport aux axes de coordonnées définissent une base naturelle de l'espace tangent, le gradient d'une fonction des coordonnées x^μ définit une base naturelle à l'espace cotangent. Rappelons nous que dans l'espace plat, nous avons construit une base de T_p^* par la relation $\hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) = \delta^\mu_\nu$. Si nous appliquons la même philosophie sur une Variété quelconque nous trouvons que (2.14) nous conduit à:

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (2.15)$$

Donc les gradients $\{dx^\mu\}$ forment une base convenable de formes mono linéaires. Une forme mono linéaire quelconque s'écrit $\omega = \omega_\mu dx^\mu$.

Loi de transformation d'un vecteur dual

Les propriétés de transformation d'une base de vecteurs duaux et de leurs composantes suivent la procédure habituelle. Pour une base de formes monolinéaires nous avons :

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} , \quad (2.16)$$

Et pour les composantes,

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \omega_{\mu} . \quad (2.17)$$

Nous écrirons généralement les composantes ω_{μ} pour relater une forme monolinéaire ω .

Tenseurs sur les variétés

La loi de transformation pour les tenseurs suit le même schéma, simplement nous remplacerons la matrice de transformation de Lorentz utilisée en espace plat par une matrice représentant une transformation plus générale de coordonnées. Un tenseur T de type (k, l) peut être développé comme suit :

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l} , \quad (2.18)$$

Loi de transformation d'un Tenseur

Les composantes se modifient par une transformation de coordonnées selon :

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} . \quad (2.19)$$

Cette loi de transformation est simple à se rappeler du fait que cela ne peut pas donner autre chose compte tenu du placement des index. Cependant, il est souvent plus simple de transformer un tenseur en considérant les vecteurs de base et les formes monolinéaires comme respectivement les dérivées partielles et les gradients et en substituant simplement dans la transformation de coordonnées.

Par exemple si on considère un tenseur symétrique S de type $(0, 2)$ sur une variété à deux dimensions dont les composantes ($x^1 = x$, $x^2 = y$) dans le système de coordonnées sont données par :

$$S_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.20)$$

Ceci peut être réécrit :

$$\begin{aligned} S &= S_{\mu\nu} (dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}) \\ &= x(dx)^2 + (dy)^2 , \end{aligned} \quad (2.21)$$

Où dans la dernière ligne on a supprimé le symbole de produit tensoriel pour alléger. Considérons maintenant les nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned}x' &= x^{1/3} \\ y' &= e^{x+y} .\end{aligned}\tag{2.22}$$

Ceci nous amène à :

$$\begin{aligned}x &= (x')^3 \\ y &= \ln(y') - (x')^3 \\ dx &= 3(x')^2 dx' \\ dy &= \frac{1}{y'} dy' - 3(x')^2 dx' .\end{aligned}\tag{2.23}$$

Nous n'avons plus qu'à introduire ces expressions dans (2.21) pour obtenir (souvenons nous que les tenseurs ne commutent pas, donc $dx' dy' \neq dy' dx'$):

$$S = 9(x')^4[1 + (x')^3](dx')^2 - 3\frac{(x')^2}{y'}(dx' dy' + dy' dx') + \frac{1}{(y')^2}(dy')^2 ,\tag{2.24}$$

soit

$$S_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} 9(x')^4[1 + (x')^3] & -3\frac{(x')^2}{y'} \\ -3\frac{(x')^2}{y'} & \frac{1}{(y')^2} \end{pmatrix} .\tag{2.25}$$

Remarquons qu'il est toujours symétrique. Nous n'avons pas utilisé la loi de transformation (2.19) directement, mais ce faisant nous avons obtenu le même résultat comme vous pouvez vérifier.

Modifications liées à la généralisation des opérations tensorielles dans un espace de Minkowski à une Variété différentiable quelconque

Pour la plupart, les diverses opérations que nous avons définies dans l'espace plat étaient non modifiées dans un contexte plus général: la contraction, la symétrisation, etc. Il y a trois exceptions importantes : les dérivées partielles, la métrique et le tenseur de Levi Civita.

Les dérivées partielles ne sont pas des tenseurs

Commençons par les dérivées partielles. La misère vient de ce que la dérivée partielle d'un Tenseur, n'est pas en général un nouveau Tenseur. Le gradient qui est la dérivée partielle d'un scalaire est un tenseur de rang (0,1) convenable, comme nous l'avons vu. Mais la dérivée

partielle de tenseur de rang plus élevé n'est pas tensorielle, comme nous pouvons le voir en considérant la dérivée partielle d'une forme monolinéaire $\partial_\mu W_\nu$ et en la redéfinissant dans un nouveau système de coordonnées.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} W_\nu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} W_\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu \right) + W_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le deuxième terme de la deuxième ligne détruit le caractère tensoriel $\partial_\mu W_\nu$ de rang supposé (0,2) de l'expression. Comme on le voit, ceci se produit parce que la dérivée de la matrice de transformation ne s'annule pas, contrairement au cas de la transformation de Lorentz en espace plat.

D'autre part l'opérateur de dérivée extérieure d forme un tenseur antisymétrique de (0, $p + 1$) quand on l'applique sur une forme p -linéaire. Pour $p = 1$, (2.26) nous indique que le terme non tensoriel peut être écrit :

$$W_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} = W_\nu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \quad (2.27)$$

Cette expression est symétrique en μ' et ν' , car les dérivées partielles commutent. Mais comme la dérivée extérieure est définie comme la dérivée partielle anti symétrisée, ce terme s'annule (antisymétriser une expression symétrique provoque sa nullité)

La transformation ne nous laisse donc que des termes correspondant à un tenseur, ce qui montre que la dérivée extérieure produit un tenseur. L'extension à une valeur de p quelconque est immédiate.

La dérivée extérieure est donc un opérateur légitime de tenseurs. Elle ne se substitue pas pour autant à la dérivée partielle, du fait qu'elle n'est définie que sur les formes linéaires. Dans la chapitre suivant, nous allons définir une dérivée covariante, qui va être l'extension de la dérivée partielle pour des Variétés quelconques.

Le tenseur métrique

L'importance du tenseur métrique dans les espaces courbés est telle qu'un nouveau symbole $g_{\mu\nu}$ lui a été attribué ($\eta_{\mu\nu}$ est réservé à la métrique de Minkowski). Ce tenseur est général, sa seule contrainte étant qu'il doit être un tenseur (0,2) symétrique. Sauf cas particulier, il est non dégénéré, ce qui veut dire que son déterminant $g = |g_{\mu\nu}|$ n'est pas nul. Ceci permet de définir la métrique inverse $g^{\mu\nu}$ via

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu. \quad (2.28)$$

La symétrie de $g_{\mu\nu}$ implique que son inverse $g^{\mu\nu}$ l'est aussi. Comme en relativité restreinte, la métrique et son inverse peuvent être utilisés pour abaisser ou élever des index.

La métrique joue un rôle central et déterminant dans la théorie de la relativité, citons quelques-unes des propriétés et applications de $g_{\mu\nu}$:

- (1) La métrique fournit une notion de passé et de futur.
- (2) La métrique permet le calcul de la longueur des chemins et du temps propre.
- (3) La métrique détermine le chemin le plus court entre deux points, et par la même, la trajectoire des particules.
- (4) La métrique remplace le champ gravitationnel newtonien Φ .
- (5) La métrique fournit la notion de référentiel localement inertiel, en conséquence un critère d'absence de rotation.
- (6) La métrique détermine la causalité, en définissant les chemins suivis par la lumière comme les plus courts possibles, plus courts qu'aucun autre chemin suivi par un quelconque autre signal ou des particules réelles.
- (7) La métrique va permettre de réaliser les opérations qui remplacent le produit scalaire de l'espace Euclidien traditionnel de la mécanique Newtonienne, etc..

Toutes ces propositions ne sont pas indépendantes, mais elles illustrent l'importance de ce tenseur.

L'intervalle d'espace temps généralisé

Dans notre discussion sur la longueur d'un chemin en Relativité Restreinte, nous avons introduit l'élément différentiel linéaire (d'intervalle d'espace-temps) $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, qui a été utilisé pour calculer la longueur d'un chemin. Comme, nous savons que dx^μ est réellement un vecteur de base dual, il devient naturel d'utiliser les termes "métrique" et "élément différentiel linéaire" de façon interchangeable, nous écrirons.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.29)$$

Pour être parfaitement cohérent nous devrions écrire "g", et nous ne ferons quelquefois, mais pas souvent car "g" est utilisé la plupart du temps pour désigner le déterminant $|g_{\mu\nu}|$.

Par exemple nous savons que l'élément différentiel linéaire d'un espace Euclidien 3D, en coordonnées Cartésiennes est

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 . \quad (2.30)$$

Nous pouvons changer de système de coordonnées. Par exemple en coordonnées sphériques, nous avons :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta , \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ce qui conduit à : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (2.32)$

Apparemment, les composantes la métrique semblent différentes de celles en coordonnées cartésiennes, mais les propriétés de l'espace restent bien entendu les mêmes.

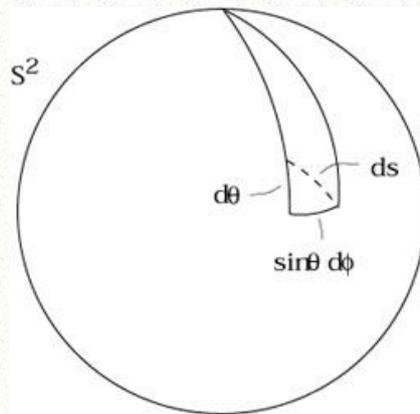
Il est l'heure de faire remarquer que la plupart des références n'insistent pas suffisamment sur la différence entre " dx ", notion informelle d'un déplacement infinitésimal et " dx ", la notion rigoureuse de la base d'une forme monolinéaire donné par le gradient d'une fonction de coordonnées. En fait notre notation " ds^2 " ne se réfère pas à une quelconque dérivée extérieure, ou au carré de quoi que ce soit, c'est juste un raccourci pour le tenseur métrique.

D'autre part " $(dx)^2$ " se réfère directement au tenseur de rang $(0, 2)$ $dx \otimes dx$.

Un bon exemple d'espace courbé est une sphère S^2 qui est définie comme le lieu des points de \mathbb{R}^3 à une distance 1 de l'origine. La métrique en coordonnées (θ, Φ) peut s'obtenir en posant $r = 1$ et $dr = 0$ dans (2.32):

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 . \tag{2.33}$$

Ceci est complètement cohérent avec l'interprétation de ds comme une longueur infinitésimale comme illustré sur la figure suivante.



Comme nous le verrons la métrique contient toutes les informations dont nous avons besoin pour définir la courbure de la Variété (en Géométrie Riemannienne en tous cas, nous indiquerons toutefois des approches encore plus générales). Dans l'espace de Minkowski nous pouvons choisir des coordonnées dans lesquelles les composantes de la métrique sont constantes. Il semblerait pourtant, que l'existence d'une courbure soit plus subtile que cela, dans l'exemple des coordonnées sphériques r et θ , en espace plat nous avons une métrique dépendante des coordonnées. Nous verrons plus tard que si on peut se ramener par un changement de coordonnées à une métrique à coefficients constants, alors l'espace est plat, mais par contre nous ne souhaitons pas forcément travailler dans ces coordonnées et même il se peut que nous ne sachions pas comment les trouver. Donc nous allons chercher une caractérisation plus précise de la courbure.

Forme canonique de la métrique

Une caractérisation utile de la métrique consiste à mettre $g_{\mu\nu}$ dans sa **forme canonique**. Dans cette forme la métrique devient

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0) , \tag{2.34}$$

Signature, rang de la métrique

Où "diag" représente une matrice diagonale avec les éléments donnés. n est la dimension de la variété, s est le nombre de " +1 " dans la forme canonique et t est le nombre de " -1," , alors $s - t$ est la **signature** de la métrique (la différence entre le nombre de signes plus et de signe moins), et $s + t$ est le **rang** de la métrique (le nombre de valeurs propres non nulles).

Si une métrique est continue le rang et la signature du tenseur métrique sont les mêmes en tout point et si la métrique n'est pas dégénérée le rang est égal à la dimension n .

Nous allons nous intéresser qu'à des métriques continues, non dégénérées.

Métriques euclidiennes, riemanniennes, lorentziennes, indéfinies

Si tous les signes sont positifs ($t = 0$) la métrique est appelée **euclidienne** ou **riemannienne** ou simplement définie positive, s'il n'y a qu'un signe moins ($t = 1$) elle est appelée **lorentzienne** ou **pseudo-riemannienne** et dans les autres cas la métrique est dite **indéfinie**.

Le mot Euclidien, dans ce cas, désigne des espaces plats ou non, il indique que la forme canonique est strictement positive, terminologie malheureuse mais standard.

Les espaces temps qui nous intéressent en Relativité Générale ont des métriques lorentziennes.

Nous n'avons pas démontré qu'il était toujours possible de mettre la métrique sous forme canonique.

En fait c'est toujours possible de le faire en un point $p \in M$, mais en général, cela ne va être possible qu'en un seul point, pas dans le voisinage du point p .

En fait, nous pouvons faire un peu plus, il apparaît qu'en tout point p il existe des coordonnées dans lesquels $g_{\mu\nu}$ prend sa forme canonique et où les dérivées premières $\partial_\sigma g_{\mu\nu}$ s'annulent (les dérivées secondes $\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}$, par contre ne s'annulent pas toutes).

Coordonnées localement inertielles

Ces coordonnées sont appelées **coordonnées localement inertielles** et la base de vecteurs associée constitue le **référentiel local de Lorentz**. Remarquons qu'en coordonnées localement inertielles la métrique s'apparente à celle d'un espace plat au premier ordre au point p . Ceci formalise la notion qu'un domaine suffisamment petit est assimilable à un espace plat (Minkowski). De plus, nous n'avons aucun mal à construire un ensemble de vecteurs de base en tout point de M , tels que la métrique prenne sa forme canonique. Le problème est que en général ils ne constitueront pas une base de coordonnées et qu'il n'y a pas de moyen de s'y ramener. Nous n'allons pas examiner la preuve détaillée de cette proposition, vous la trouverez dans Schutz, pp. 158-160, où elle porte le nom de "théorème de localité plate". Il qualifie aussi les référentiels lorentziens de Référentiels se déplaçant temporairement ensembles.

Détermination de l'espace tangent en un point

Il est intéressant de voir une esquisse de la preuve, dans le cas particulier d'une métrique Lorentzienne à quatre dimensions. L'idée consiste à considérer la loi de transformation suivante

pour la métrique :

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} , \quad (2.35)$$

Et de développer les deux membres en série de Taylor par rapport aux coordonnées recherchées $x^{\mu'}$. Le développement des anciennes coordonnées x^μ devient :

$$x^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right)_p x^{\mu'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'}} \right)_p x^{\mu'} x^{\mu'} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'}} \right)_p x^{\mu'} x^{\mu'} x^{\mu'} + \dots , \quad (2.36)$$

Avec les autres développements de façon similaire (Pour simplifier nous avons posé $x^\mu(p) = x^{\mu'}(p) = 0$.) Alors, en utilisant une notation très symbolique, le développement de (2.35) au deuxième ordre donne :

$$\begin{aligned} & (g')_p + (\partial' g')_p x' + (\partial' \partial' g')_p x' x' \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} g \right)_p + \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \partial' g \right)_p x' \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^3 x}{\partial x' \partial x' \partial x'} g + \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} \partial' g + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} \partial' \partial' g \right)_p x' x' \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nous pouvons évaluer les termes de même ordre en x' de chaque côté. Donc les composantes $g_{\mu'\nu'}(p)$, 10 valeurs en tout (permettant de définir un tenseur symétrique à deux index) sont déterminés par la matrice $(\partial x^\mu / \partial x^{\mu'})_p$. C'est une matrice 4×4 sans contraintes, donc nous disposons de 16 nombres indépendants ce qui est suffisant pour renseigner les 10 nombres à pourvoir pour permettre de poser $g_{\mu'\nu'}(p)$ sous sa forme canonique, du moins pour autant que le degré de liberté soit concerné (Il y a des contraintes, si on regarde de plus près, de conservation de la signature et du rang).

Les six degrés de liberté restants peuvent être considérés comme les paramètres du groupe de Lorentz qui doivent laisser la forme canonique inchangée. Au premier ordre nous avons les dérivées $\partial_\sigma g_{\mu'\nu'}(p)$, quatre dérivées de dix composantes soit quarante nombres. Si on examine le membre droit de (2.37) nous voyons que nous avons maintenant la liberté supplémentaire de choisir $(\partial^2 x^\mu / \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'})_p$.

Dans cet ensemble de nombres, il y a 10 possibilités indépendantes pour les index μ_1' et μ_2' (C'est symétrique car les dérivées partielles commutent) et quatre choix pour μ , soit un total de 40 possibilités. C'est exactement ce qu'il nous faut pour déterminer toutes les dérivées premières de la métrique, que nous pouvons alors annuler. Au deuxième ordre, côté contraintes, nous trouvons $\partial_{\rho'} \partial_{\sigma'} g_{\mu'\nu'}(p)$; qui est symétrique en ρ' et σ' ainsi que μ' et ν' , soit un total de $10 \times 10 = 100$ nombres.

Côté degrés de liberté nous avons $(\partial^3 x^\mu / \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'} \partial x^{\mu'})_p$. Ceci est symétrique dans les trois indices ce qui donne 20 possibilités multipliés par les quatre possibilités de l'exposant, ce qui fait 80 degrés de liberté, 20 de moins que ce qui est requis, donc nous ne pouvons pas annuler les dérivées secondes de la métrique. L'écart avec la platitude sera mesuré par 20 degrés de liberté indépendants des coordonnées représentant les dérivées secondes du champ de tenseurs métriques. Nous verrons plus tard ce qu'il en est, quand nous caractériserons la courbure en utilisant le tenseur de Riemann qui possède précisément 20 composantes indépendantes.

Le cas du tenseur de Levi-Civita

Le dernier point que nous allons étudier dans le domaine des tenseurs concerne la relation entre le tenseur Levi-Civita, $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ et les espaces plats. Souvenons nous de sa version en espace plat que nous dénoterons $\sim\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$, il était défini par :

$$\begin{aligned} \sim\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} &= 1, \text{ si } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \text{ est une permutation paire de } 0, 1, \dots, (n-1) \\ &= -1, \text{ si } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \text{ est une permutation impaire de } 0, 1, \dots, (n-1) \\ &= 0 \quad \text{autrement} \end{aligned}$$

Le symbole de Levi-Civita

Nous allons maintenant définir le **symbole de Levi-Civita** comme étant exactement $\sim\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$, un objet avec n index qui a les composantes définies ci dessus dans *n'importe quel système de coordonnées*.

Ceci est appelé un symbole parce que ce n'est évidemment pas un tenseur puisqu'il est supposé ne pas changer par une transformation de coordonnées.

Nous pouvons étudier son comportement en remarquant d'abord qu'étant donné une matrice $n \times n$, $M^{\mu}_{\mu'}$, son déterminant $|M|$ obéit à :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu'_1\mu'_2\dots\mu'_n} |M| = \tilde{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} M^{\mu_2}_{\mu'_2} \dots M^{\mu_n}_{\mu'_n} \quad (2.39)$$

C'est juste une propriété des déterminants que vous trouverez dans votre ouvrage d'algèbre linéaire préféré. Il s'ensuit que si nous posons $M^{\mu}_{\mu'} = \partial x^{\mu} / \partial x^{\mu'}$, nous avons :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu'_1\mu'_2\dots\mu'_n} = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \right| \tilde{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \quad (2.40)$$

La densité de Tenseur

C'est presque la loi de transformation des tenseurs, au déterminant en tête près. Les objets qui se transforment ainsi sont appelés des **densités de tenseur**. Un autre exemple est donné par le déterminant de la métrique $g = |g_{\mu\nu}|$. Il est facile de vérifier en prenant le déterminant des deux côtés de (2.35) que par une transformation de coordonnées nous obtenons

$$g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \right|^{-2} g(x^{\mu}) \quad (2.41)$$

Donc g n'est pas également un tenseur, il se transforme selon une forme similaire au symbole de Levi-Civita sauf que le Jacobien est élevé à la puissance 2.

Poids d'une densité de tenseur, Jacobien

La puissance à laquelle le Jacobien est élevé, s'appelle le **poids** de la densité de tenseur. Le symbole de Levi-Civita a une densité de poids 1 tandis que g qui est un scalaire a une densité de poids 2.

Mais pour nos applications, ce sont les tenseurs qui nous intéressent, pas les densités de tenseurs. Il existe un moyen simple de convertir une densité de tenseur en un tenseur valide qui consiste à le multiplier par $|g|^{w/2}$, où w est le poids de la densité (le symbole valeur absolue exprime le fait que $g < 0$ pour les métriques de Lorentz). Le résultat va se transformer conformément à la loi de transformation des tenseurs. Par exemple nous pouvons définir le tenseur de Levi-Civita par :

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} . \quad (2.42)$$

C'est ce tenseur qui est défini dans la dualité de Hodge (1.87), qui reste inchangée quand on généralise à des variétés arbitraires. Comme c'est un tenseur authentique nous pouvons abaisser, élever des index etc. On trouve également le symbole de Levi-Civita défini avec des exposants, $\tilde{\epsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$, dont les composantes sont numériquement égales à celles du symbole avec les indices. Cela correspond alors à une densité de tenseur de poids -1, et est relié au tenseur avec exposants par

$$\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \text{sgn}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} . \quad (2.43)$$

Faisons une digression, pour être clair, même avec le facteur $(|g|)^{1/2}$, le tenseur de Levi-Civita n'est pas d'une certaine manière un authentique tenseur, car il ne peut pas être globalement défini dans certaines variétés. Celles où il peut être défini sont qualifiées d'**orientables**, et nous ne nous intéresserons qu'à elles bien entendu. L'exemple classique de variété non orientable est le ruban de Möbius ; voir Schutz's *Geometrical Methods in Mathematical Physics* (ou équivalent) pour plus de détails.

Volumes et intégration dans une Variété

Nous allons retrouver, avec intérêt, les densités de tenseur dans les opérations d'intégration dans les Variétés.

Vous vous êtes sans doute rendu compte que par le calcul sur \mathbb{R}^n l'élément de volume $d^n x$ est entaché d'un facteur égal au Jacobien lors d'un changement de coordonnées :

$$d^n x' = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| d^n x . \quad (2.44)$$

Les formes différentielles vont nous proposer une explication élégante de cette formule qui se déduit du fait suivant : *Sur une variété à n dimensions « l'intégrant » est en fait une n-forme.*

Autrement dit, l'intégrale sur une région S à n dimensions appartenant à une variété V est **une application de champs de n-formes sur les nombres réels.**

Cela peut paraître bizarre, pourtant l'exemple d'une intégrale à une dimension le montre

simplement. En une dimension toute 1-forme (forme monolinéaire) peut s'écrire $\omega = \omega(x) dx$ où le premier ω est une 1-forme, $\omega(x)$ représente son unique composante

En fait nous écrivons les intégrales à une dimension sous la forme : $\int \omega(x).dx$, où dx est censé représenter une distance infinitésimale, alors que formellement c'est une forme différentielle.

Pour clarifier cela, considérons plus d'une dimension. Si nous déclarons que l'intégrand est une n -forme, nous devons expliquer en quoi il est antisymétrique, et en cela pourquoi il est un tenseur $(0, n)$, application linéaire d'un ensemble de n vecteurs sur \mathbb{R} .

Nous sommes tous d'accord pour écrire l'intégrale sous la forme : $\int f(x).d\mu$, où $f(x)$ est une fonction scalaire sur la variété et $d\mu$ est l'élément de volume, (mesure).

Le rôle de l'élément de volume est d'attribuer à chaque région infinitésimale, un nombre réel infinitésimal, à savoir le volume de la région. Une caractéristique sympathique des régions infinitésimales (à la différence des régions étendues) est qu'elles peuvent être représentées par des parallélépipèdes rectangles, même si en espace courbe cette notion n'a pas forcément de sens, en région infinitésimale comme on peut négliger la courbure, cela a un sens.

Au risque d'être pas complètement rigoureux, nous poursuivons notre exposé motivé par la prise de conscience du problème.

Sur un exemple à trois dimensions, on voit qu'un parallélépipède nécessite n vecteurs (ici U, V, W) pour le spécifier (qui définissent ses arêtes). Notre élément de volume, doit être une application linéaire de n vecteurs (ici infinitésimaux) vers les nombres réels (ici infinitésimaux) : $d\mu(U, V, W) \rightarrow \mathbb{R}$. On doit pouvoir aussi ajuster linéairement l'échelle par des nombres réels ; si nous changeons la longueur des vecteurs de définition, le volume change en conséquence $d\mu(aU, bV, cW) = abc.d\mu(U, V, W)$. Si la linéarité par rapport à l'addition de vecteurs ne vous paraît pas évidente, mais vous pouvez vous en convaincre par un petit dessin. Donc notre élément de volume est un tenseur de variance $(0, n)$ très convenable. Pourquoi antisymétrique ?

Parce que nos vecteurs sont orientés, l'élément de volume peut être orienté. Si on permute deux vecteurs le volume aura la même valeur absolue, mais de signe opposé. Si deux vecteurs sont colinéaires le volume s'annule.

Ce qui montre que les éléments de volume sont vraiment des n -formes.

L'élément de volume de base $d^n x$ est lui-même plutôt une n -forme de densité, mais il peut facilement être utilisé pour construire une authentique n -forme. Pour comprendre comment c'est possible, nous devons procéder à l'identification

$$d^n x \leftrightarrow dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} . \tag{2.45}$$

L'expression de droite est trompeuse, car elle ressemble à s'y méprendre à un tenseur (une n -forme, en fait) mais en réalité c'est une densité de tenseur. Certes, si nous avons deux fonctions f et g sur M , alors df et dg seraient des formes monolinéaires, et $df \wedge dg$ serait une forme bilinéaire.

Mais nous voudrions interpréter le membre de droite de (2.45) comme un objet dépendant des coordonnées qui, dans le système de coordonnées x^μ , agit comme $dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. Cela paraît tordu, mais c'est lié à une ambiguïté de notation et en pratique nous allons juste utiliser la notation abrégée " $d^n x$ ".

Pour justifier toutes ces précautions oratoires, regardons comment (2.45) change par une transformation de coordonnées. Remarquons d'abord que la définition du produit extérieur nous

permet d'écrire

$$dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \frac{1}{n!} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}, \quad (2.46)$$

Car, le produit extérieur et le symbole de Levi-Civita sont tous deux complètement antisymétriques. Par une transformation de coordonnées $\sim \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ reste inchangé, alors que les formes monolinéaires changent selon (2.16), conduisant à :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} &= \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} dx^{\mu'_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu'_n} \\ &= \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} dx^{\mu'_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu'_n}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Si, nous multiplions les deux membres par le jacobien, nous retrouvons (2.44).

Il est donc clair que l'élément de volume de base $d^n x$ se comporte comme une densité de tenseur et non pas comme un tenseur, et il est immédiat de construire un élément de volume invariant en multipliant par $(|g|)^{1/2}$:

$$\sqrt{|g'|} dx^{0'} \wedge \dots \wedge dx^{(n-1)'} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}, \quad (2.48)$$

Qui n'est en fait que : $(n!)^{-1} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$. Pour simplifier, nous écrirons l'élément de volume $(|g|)^{1/2} d^n x$, plutôt que sous sa forme explicite $(|g|)^{1/2} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$; cela devrait nous suffire pour nous rappeler qu'il s'agit d'une n -forme. En fait l'élément de volume n'est ni plus ni moins que le tenseur de Levi Cevita $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ ce que l'on démontre simplement en réintroduisant les vecteurs de base des 1-formes, comme cela est décrit dans « Space time and Geometry » de Sean M. Carroll (p.89-90).

Le théorème de Stokes en point d'orgue

Permettons une digression finale, considérons un des théorèmes les plus élégants de la géométrie différentielle: le théorème de Stokes. Ce théorème est la généralisation, du théorème du calcul fondamental, $\int_a^b dx = a - b$. Imaginons que nous avons une variété à n dimensions M avec une limite ∂M , et une $(n - 1)$ -forme ω sur M . Nous n'avons pas discuté des variétés avec limite, mais l'idée est évidente, M peut être par exemple l'intérieur d'une surface fermée de dimension $(n - 1)$ ∂M .) Alors $d\omega$ est une n -forme, qui peut être intégrée sur M , tandis que ω lui-même peut être intégré sur ∂M . Le théorème de Stokes est alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (2.49)$$

Vous pourrez vous convaincre que les différents cas de ce théorème recouvrent non seulement le théorème fondamental du calcul, mais aussi les théorèmes de Green, Gauss et de Stokes classique du calcul vectoriel en trois dimensions.