

Gravitation Quantique à Boucles

Karim NOUI

**Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique, TOURS
Chercheur associé APC, Paris 7**

Pourquoi une théorie de la gravitation quantique ?

Deux monuments de la physique fondamentale

- ▷ Théorie quantique des champs : monde des particules élémentaires
- ▷ Relativité générale : grandes structures de l'Univers

Pourquoi une théorie de la gravitation quantique ?

Deux monuments de la physique fondamentale

- ▷ Théorie quantique des champs : monde des particules élémentaires
- ▷ Relativité générale : grandes structures de l'Univers

La théorie quantique des champs

- ▷ Beauté mathématique : symétries de jauge, renormalisation...
- ▷ Prédiction expérimentale d'une précision exceptionnelle : g-2 du muon

muon

Pourquoi une théorie de la gravitation quantique ?

Deux monuments de la physique fondamentale

- ▷ Théorie quantique des champs : monde des particules élémentaires
- ▷ Relativité générale : grandes structures de l'Univers

La théorie quantique des champs

- ▷ Beauté mathématique : symétries de jauge, renormalisation...
- ▷ Prédiction expérimentale d'une précision exceptionnelle : g-2 du muon

La Relativité générale (RG)

- ▷ La gravitation via la géométrie courbe
- ▷ Vérification d'une précision inégalée : principe d'équivalence

Pourquoi une théorie de la gravitation quantique ?

Deux monuments de la physique fondamentale

- ▷ Théorie quantique des champs : monde des particules élémentaires
- ▷ Relativité générale : grandes structures de l'Univers

La théorie quantique des champs

- ▷ Beauté mathématique : symétries de jauge, renormalisation...
- ▷ Prédiction expérimentale d'une précision exceptionnelle : g-2 du muon

La Relativité générale (RG)

- ▷ La gravitation via la géométrie courbe
- ▷ Vérification d'une précision inégalée : principe d'équivalence

Alors... Pourquoi une théorie de la gravitation quantique ?

- ▷ Les deux théories coexistaient à l'origine de l'Univers
- ▷ La RG prévoit des singularités : limites de la théorie
- ▷ Question de l'unification des interactions fondamentales

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

1. Fondements de la Gravitation Quantique à Boucles

- *Les variables d'Ashtekar*
- *Quantification Hamiltonienne*

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

1. Fondements de la Gravitation Quantique à Boucles

- *Les variables d'Ashtekar*
- *Quantification Hamiltonienne*

2. Prédications sur la structure de l'espace-temps

- *Les états quantiques de la gravitation*
- *Les quantas d'espace*

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

1. Fondements de la Gravitation Quantique à Boucles

- *Les variables d'Ashtekar*
- *Quantification Hamiltonienne*

2. Prédications sur la structure de l'espace-temps

- *Les états quantiques de la gravitation*
- *Les quantas d'espace*

3. Applications aux trous noirs et à la cosmologie

- *Description microscopique d'un trou noir*
- *Un mot sur la cosmologie quantique à boucles*

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

1. Fondements de la Gravitation Quantique à Boucles

- *Les variables d'Ashtekar*
- *Quantification Hamiltonienne*

2. Prédications sur la structure de l'espace-temps

- *Les états quantiques de la gravitation*
- *Les quantas d'espace*

3. Applications aux trous noirs et à la cosmologie

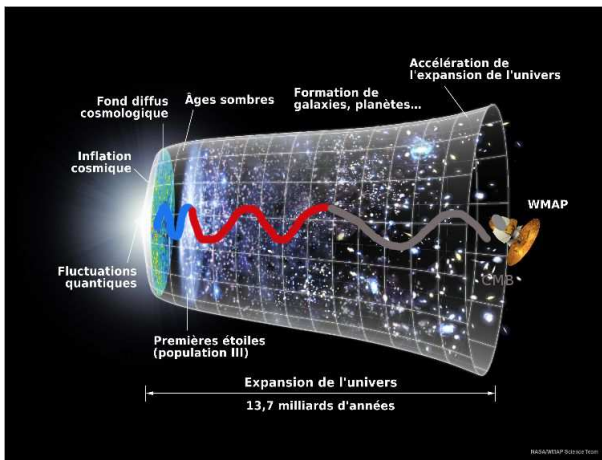
- *Description microscopique d'un trou noir*
- *Un mot sur la cosmologie quantique à boucles*

Conclusion : les beautés, les perspectives et les limites

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

De la gravitation classique...

Un espace-temps élastique et dynamique



Les singularités : limites prédictives de la RG

- ▷ Théorème des singularités de Penrose-Hawking
- ▷ La singularité originelle de l'Univers
- ▷ La singularité dans les trous noirs : information perdue et entropie



Unifier la physique quantique et la gravitation : une nécessité

- ▷ Répondre à la question des singularités
- ▷ Proposer interprétation microscopique de l'entropie des trous noirs
- ▷ Décrire la nature fondamentale de l'espace-temps

Unifier la physique quantique et la gravitation : une nécessité

- ▷ Répondre à la question des singularités
- ▷ Proposer interprétation microscopique de l'entropie des trous noirs
- ▷ Décrire la nature fondamentale de l'espace-temps

Faire entrer la gravitation dans le cadre quantique : les cordes

- ▷ La gravitation est une théorie effective
- ▷ Unification des interactions et de la matière
- ▷ Des dimensions supplémentaires et des particules supersymétriques ?

Unifier la physique quantique et la gravitation : une nécessité

- ▷ Répondre à la question des singularités
- ▷ Proposer interprétation microscopique de l'entropie des trous noirs
- ▷ Décrire la nature fondamentale de l'espace-temps

Faire entrer la gravitation dans le cadre quantique : les cordes

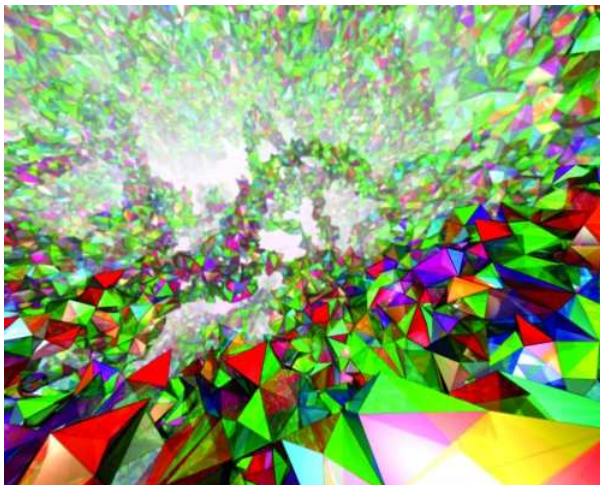
- ▷ La gravitation est une théorie effective
- ▷ Unification des interactions et de la matière
- ▷ Des dimensions supplémentaires et des particules supersymétriques ?

Faire entrer la physique quantique dans la gravitation : les boucles

- ▷ La gravitation est une théorie fondamentale
- ▷ Méthode de quantification originale...
- ▷ Théorie de la gravitation pure : pas d'unification

Introduction : de la gravitation classique à la gravitation quantique

La gravitation quantique à boucles : Un espace discret



La théorie classique

- ▷ Théorie de la géométrie : $(M, g_{\mu\nu})$
- ▷ Action d'Einstein-Hilbert : $S_{EH}[g] = \int_M d^4x \sqrt{|g|} (R[g] - 2\Lambda)$

L'échec de la quantification fonctionnelle

La théorie classique

- ▷ Théorie de la géométrie : $(M, g_{\mu\nu})$
- ▷ Action d'Einstein-Hilbert : $S_{EH}[g] = \int_M d^4x \sqrt{|g|} (R[g] - 2\Lambda)$

La quantification covariante

- ▷ Perturbations autour de Minkowski : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
- ▷ Intégrale de chemin :

$$\mathcal{Z}(M) = \int [\mathcal{D}h] \exp \frac{i}{\hbar} S_{EH}[\eta + h]$$

- ▷ La théorie est non renormalisable : non prédictible

L'échec de la quantification fonctionnelle

La théorie classique

- ▷ Théorie de la géométrie : $(M, g_{\mu\nu})$
- ▷ Action d'Einstein-Hilbert : $S_{EH}[g] = \int_M d^4x \sqrt{|g|} (R[g] - 2\Lambda)$

La quantification covariante

- ▷ Perturbations autour de Minkowski : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
- ▷ Intégrale de chemin :

$$\mathcal{Z}(M) = \int [\mathcal{D}h] \exp \frac{i}{\hbar} S_{EH}[\eta + h]$$

- ▷ La théorie est non renormalisable : non prédictible

Les leçons de l'échec

- ▷ Importance de l'invariance sous les difféomorphismes
- ▷ La métrique de fond brise la covariance
- ▷ La méthode perturbative a-t-elle un sens?

La quantification canonique : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique classique

- ▷ Espace des phases : position q et impulsion p avec $\{p, q\} = 1$
- ▷ Dynamique donné par le Hamiltonien : énergie $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$
- ▷ Mouvement : $p' = \{H, p\} = -q$ et $q' = \{H, q\} = p$ donc $q'' + q = 0$

La quantification canonique : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique classique

- ▷ Espace des phases : position q et impulsion p avec $\{p, q\} = 1$
- ▷ Dynamique donné par le Hamiltonien : énergie $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$
- ▷ Mouvement : $p' = \{H, p\} = -q$ et $q' = \{H, q\} = p$ donc $q'' + q = 0$

La quantification canonique ou hamiltonienne

- ▷ Principe de correspondance : $p \rightarrow \hat{p}$ et $q \rightarrow \hat{q}$
- ▷ Relation de commutation : $[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar$
- ▷ Les états quantiques sont les fonctions d'onde $\psi(q) \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $|\psi(q)|^2$ sont les densités de probabilité
- ▷ Action des opérateurs :

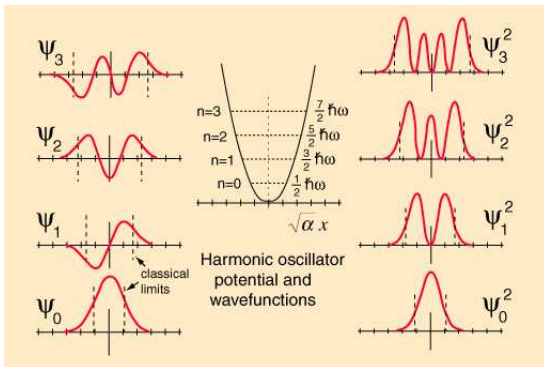
$$\hat{q}\psi(q) = q\psi(q) \text{ et } \hat{p}\psi(q) = i\hbar \frac{\partial\psi(q)}{\partial q}$$

- ▷ H devient un opérateur $\hat{H} = -\hbar^2\Delta + q^2$

Les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique

Etats propres et valeurs propres : ψ_n et E_n

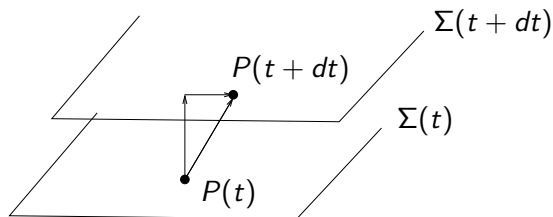
$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad \text{et} \quad E_n = n + \frac{1}{2}$$



La quantification canonique de la gravitation : ADM

Le formalisme ADM : première tentative en 1961

- ▷ Espace-temps sous la forme $M = \Sigma \times \mathbb{R}$

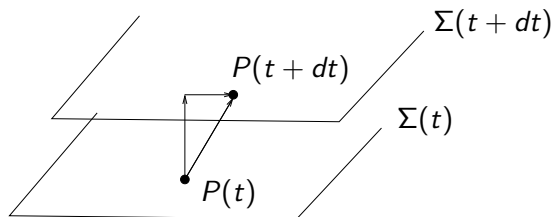


- ▷ Espace des phases : $\{\pi^{ab}, h_{cd}\} = \delta_c^a \delta_d^b + \text{sym.}$

La quantification canonique de la gravitation : ADM

Le formalisme ADM : première tentative en 1961

- ▷ Espace-temps sous la forme $M = \Sigma \times \mathbb{R}$



- ▷ Espace des phases : $\{\pi^{ab}, h_{cd}\} = \delta_c^a \delta_d^b + \text{sym.}$
- ▷ La dynamique est donnée par les contraintes $H = 0$ et $H_i = 0$ avec

$$H = \sqrt{|h|} \left(-R(h) + |h|^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} |h|^{-1} \pi^2 \right)$$

- ▷ Techniquement trop complexe : on n'en tire rien !

Le formalisme d'Ashtekar de la gravitation en 1986

- ▷ L'espace des phases ressemble à celui de l'électromagnétisme
- ▷ Un champ électrique E et une connection (potentiel vecteur) A

$$\{E, A\} = 1$$

- ▷ L'expression des contraintes se simplifient et devient polynomiale

$$H = \varepsilon^{ij}_k E_i^a E_j^b \left(\partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k + \epsilon^k_{mn} A_a^m A_b^n \right)$$

- ▷ Généralisation : Immirzi-Barbero en 1995

Le formalisme d'Ashtekar de la gravitation en 1986

- ▷ L'espace des phases ressemble à celui de l'électromagnétisme
- ▷ Un champ électrique E et une connection (potentiel vecteur) A

$$\{E, A\} = 1$$

- ▷ L'expression des contraintes se simplifient et devient polynomiale

$$H = \varepsilon^{ij}{}_k E_i^a E_j^b \left(\partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k + \epsilon^k{}_{mn} A_a^m A_b^n \right)$$

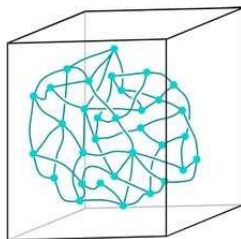
- ▷ Généralisation : Immirzi-Barbero en 1995

Vers les états quantiques de la gravitation

- ▷ Les états seraient des fonctionnelles $\psi(A)$
- ▷ \hat{A} agit par multiplication et \hat{E} par dérivation
- ▷ On ne sait pas résoudre la dynamique quantique mais...

Les réseaux de spins en gravitation quantique

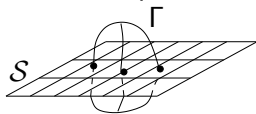
- ▷ L'espace est localisé sur les lignes d'un graphe γ
- ▷ Les états cinématiques sont indexés par les graphes γ



- ▷ Les liens du graphe sont colorés par un entier l_ℓ (spin)
- ▷ Les nœuds sont colorés par une famille d'entiers ι_n (entrelaceur)

L'aire $\mathcal{A}(S)$ d'une surface S est un opérateur

- ▷ Expression classique de l'aire : $\mathcal{A}(S) = \int_S \sqrt{n_a E_i^a n_b E_i^b} d^2\sigma$
- ▷ L'Operator d'aire quantique agit sur les états cinématiques
- ▷ Spectre de l'opérateur d'aire



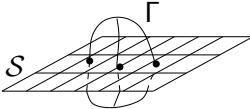
The diagram shows a rectangular surface S with horizontal lines. A closed loop Γ is drawn around the surface, passing through three points marked with black dots. The loop is oriented vertically.

$$\mathcal{A}(S)|S\rangle = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3} \sum_{P \in S \cap \Gamma} \sqrt{j_P(j_P + 1)} |S\rangle$$

Les opérateurs de géométrie : Aires et Volumes discrets

L'aire $\mathcal{A}(S)$ d'une surface S est un opérateur

- ▷ Expression classique de l'aire : $\mathcal{A}(S) = \int_S \sqrt{n_a E_i^a n_b E_j^b} d^2\sigma$
- ▷ L'Operator d'aire quantique agit sur les états cinématiques
- ▷ Spectre de l'opérateur d'aire



The diagram shows a rectangular surface S with horizontal hatching. A closed loop Γ is drawn around the surface, passing through three vertices marked with black dots. The loop is depicted as a sphere-like shape.

$$\mathcal{A}(S)|S\rangle = \frac{8\pi\gamma\hbar G}{c^3} \sum_{P \in S \cap \Gamma} \sqrt{j_P(j_P + 1)} |S\rangle$$

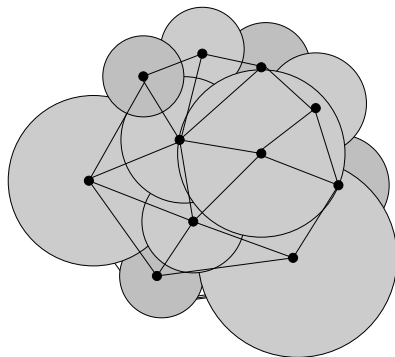
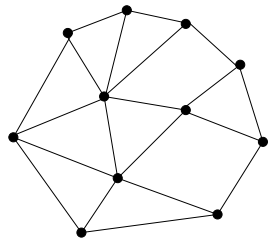
L'opérateur de volume $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ agit aussi sur les états

- ▷ Le volume classique d'un domaine \mathcal{R} :

$$\mathcal{V}(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{|\epsilon_{abc}\epsilon_{ijk} E^{ai} E^{bj} E^{ck}|}{3!}}$$

- ▷ Il agit sur les nœuds et son spectre est discret.

L'espace à l'échelle de Planck

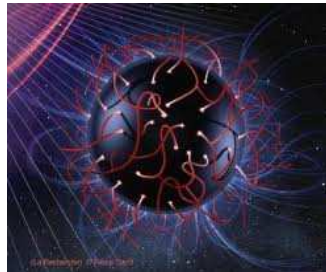


- ▷ Les liens transportent des quanta d'aire
- ▷ Les nœuds transportent des quanta de volume
- ▷ Il existe une échelle d'aire fondamentale : l'aire de Planck ℓ_P^2

Une description microscopique des trous noirs

Le trou noir : un test pour la gravitation quantique

- ▷ Thermodynamique des trous noirs : $S = a_H/4$
- ▷ Rayonnement thermique d'un trou noir : évaporation
- ▷ Question : trouver les états fondamentaux du trou noir (analogie avec le photon qui permet de comprendre le rayonnement du corps noir)



Les états sont les liens du graphe qui entrent dans l'horizon

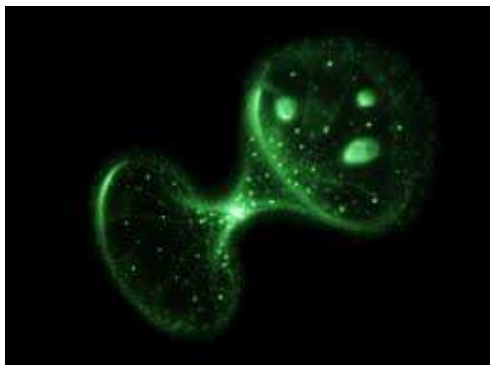
$$S = \ln(\Omega) = a_H/4 \text{ si on fixe } \gamma$$

Ω : nombre de micro-états pour a_H

La résolution de la singularité originelle

Résolution du big bang

- ▷ Existence d'une échelle fondamentale : l'univers ne peut pas être plus petit que l_P^3



- ▷ Observations expérimentales de ce rebon ?

Les beautés de la Gravitation Quantique à Boucles

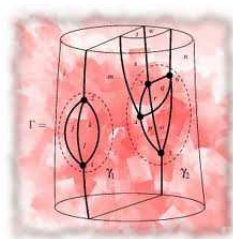
- ▷ Quantification canonique, non-perturbative, indépendante de fond
- ▷ Description attirante de l'espace à l'échelle de Planck
- ▷ Trous noirs, cosmologie quantique à boucles etc...

Les beautés de la Gravitation Quantique à Boucles

- ▷ Quantification canonique, non-perturbative, indépendante de fond
- ▷ Description attirante de l'espace à l'échelle de Planck
- ▷ Trous noirs, cosmologie quantique à boucles etc...

Les perspectives à venir : la dynamique quantique

- ▷ Théorie des mousses de spins : évolution des graphes



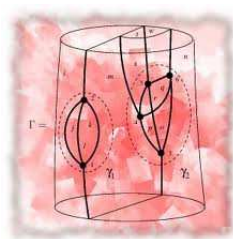
- ▷ Lien avec la quantification covariante : intégrale de chemin

Les beautés de la Gravitation Quantique à Boucles

- ▷ Quantification canonique, non-perturbative, indépendante de fond
- ▷ Description attirante de l'espace à l'échelle de Planck
- ▷ Trous noirs, cosmologie quantique à boucles etc...

Les perspectives à venir : la dynamique quantique

- ▷ Théorie des mousses de spins : évolution des graphes



- ▷ Lien avec la quantification covariante : intégrale de chemin

Les limites de cette approche

Brisure de la covariance de la RG

- ▷ Le temps est singularisé
- ▷ Le temps est une variable classique ?

Comment émerge la physique des hautes énergies

- ▷ Question de la limite classique de la théorie
- ▷ Retrouver l'espace-temps continu à notre échelle

Ce n'est pas une théorie de grande unification

- ▷ Façon naturelle d'inclure la matière ?
- ▷ La matière peut-elle émerger ?

Comment observer des signatures de la Gravitation à Boucles ?