

$E = Mc^2$: L'énergie du Soleil

« L'influence du Soleil sur ce monde, d'où dérivent ici-bas tout mouvement et toute vie , tout ordre et tout ornement de la nature, est telle, que plus on la considère et plus on la trouve merveilleuse. De là pour le philosophe l'obligation de mettre en œuvre toutes les ressources de son esprit, afin de s'élever à une théorie d'un tel sujet. » *Johannes Kepler (1571-1630)*. Cité dans le N° de juin 2020 de l'Astronomie.



$$E = Mc^2$$

DÉMONSTRATION INCLUE
DANS LE DIAPORAMA

$$E = Mc^2$$

Dans cette expression très connue, qui est valable localement, on conçoit bien que l'énergie E de la matière soit proportionnelle à sa masse M , mais ce qui peut surprendre c'est la présence de la vitesse de la lumière et, de plus, au carré!

Connaissant la valeur très élevée de la vitesse de la lumière, cela montre que l'énergie, qui est une énergie potentielle, de la matière est énorme ce dont on ne se doutait pas avant le 20^{ième} siècle.

Même si cette équation avait été pressentie par certains, au tournant du 20^{ième} siècle, elle sera établie (assez laborieusement) par Einstein dans le cadre la relativité restreinte, dont elle est une conséquence.

$$E = Mc^2$$



Peu, après la publication de son article fondateur en 1905 sur la relativité restreinte que peu de personnes avaient compris, dans la même année, Einstein publie un deuxième article où il présente cette équation et en donne une démonstration contestée par certains. Voir références, pour ces articles. Sa démonstration voir références [3][4] est reproduite en annexe A-1

Il en donnera plusieurs autres. Nous présenterons une démonstration de Yves (1952), voir référence [7], citée par [1] et [8], qui n'est pas d'Einstein, mais qui est plus simple.

$$E = Mc^2$$

Cette démonstration montrera que la présence du terme en c^2 (vitesse de la lumière au carré) est bien une conséquence de la théorie de la relativité restreinte, en particulier de son principe fondamental qui est que toutes les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les référentiels inertiels, aussi appelés référentiels galiléens, en hommage à Galilée.

Mais, pour cela, il faut commencer par considérer les grandeurs qui figurent dans l'équation car, si nous avons une idée intuitive de ce qu'est la masse et l'énergie, quand on regarde de plus près, on constate que cela n'est pas aussi simple qu'il y paraît.

Qu'est-ce que la masse?

Ce concept qui nous semble familier n'est pas si simple qu'il y paraît.

En effet la masse se décline en trois versions

La masse gravitationnelle

La masse gravitationnelle se décline en 2 catégories:

1 - La masse gravitationnelle passive

Communément appelée **masse pesante**, terme que adopterons, nous la considérerons brièvement, bien qu'elle n'intervienne pas dans l'élaboration de l'équation $E = Mc^2$, car elle a joué un rôle dans notre appréciation du concept de masse.

2 - La masse gravitationnelle active

qui est celle qui génère le champ de gravitation. C'est à cette masse active de la Terre par exemple que la masse pesante d'un objet se couple pour générer son poids.

La masse pesante

Cette propriété se manifeste de manière évidente par le « poids » des objets matériels : Sur Terre, pour soulever un objet matériel posé au sol il faut faire un effort d'autant plus grand que la quantité de matière (d'une même sorte) est importante.

L'effort est proportionnel à la quantité de cette matière qui peut être évaluée par son volume.

Mais ce poids, pour un volume de matière donné, dépend de la matière. Ainsi le bois, le fer, le plomb etc., ont manifestement des masses pesantes (poids) différentes pour un même volume.

Cette masse est donc une propriété de la matière puisqu'elle en dépend.

La masse inerte

De manière plus subtile, un autre caractère correspondant à une phénoménologie différente existe : C'est la « résistance » des corps matériels au changement de leur vitesse par rapport à un repère donné. La mise en mouvement d'un chariot sur roues par exemple.

Ainsi sur Terre, sur une surface lisse horizontale, pour mettre en mouvement une sphère massive par exemple, il faut appliquer un effort et ceci de manière d'autant plus prolongée qu'on veut lui communiquer une vitesse de plus en plus élevée.

Si la sphère, de même matière, est deux fois plus volumineuse il faudra appliquer une force double pour arriver au même résultat. Là encore l'effort est proportionnel à la quantité de matière d'une nature donnée.

La masse inerte

Cette propriété de la masse qui s'oppose au changement s'appelle l'inertie de la masse et on l'appellera « **masse inerte** (ou inertielle) ». **Dans l'équation $E = Mc^2$, M est la masse inerte.**

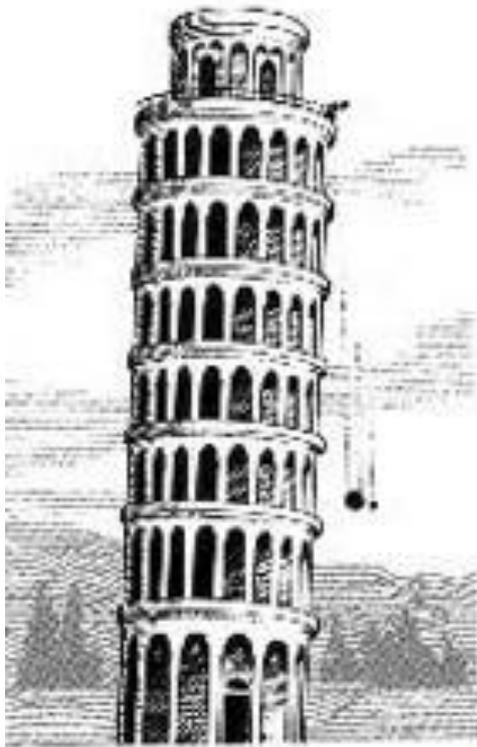
Le corps mis en mouvement conserve sa vitesse lorsque l'effort appliqué cesse (en négligeant les frottements).

Le mouvement à vitesse constante par rapport au support est qualifié d'inertiel. Le concept d'inertie est un concept fondamental en mécanique classique et en relativité.

Une propriété essentielle d'un repère inertiel c'est qu'il est un repère où aucune contrainte ne s'applique sur les corps étendus qui y sont attachés (chute libre).

Le principe d'équivalence

Le concept de masse pesante et le concept de masse inerte qui paraissent différents sont étroitement liés par ce qu'on appelle le principe d'équivalence dont la constatation expérimentale est attribuée à Galilée.



Du haut de la tour (penchée) de Pise, deux corps de masses différentes, lâchés en même temps, touchent le sol en même temps.

La masse pesante qui correspond à une force d'attraction qui conférerait une accélération d'autant plus grande que la masse est grande est compensée par la masse inerte dont la résistance au changement (l'accélération) est d'autant plus forte que la masse inerte est forte.

Le principe d'équivalence

Le fait que le mouvement ne dépende pas de la masse de l'objet montre que la masse pesante et la masse inerte sont égales.

C'est le principe d'équivalence de Galilée (pour la gravitation), qu'Einstein a étendu à la relativité générale.

Un objet matériel possède simultanément les 3 attributs de masse: Il a une masse inerte, une masse passive et une masse active.

Comme l'effet de la masse active est très faible, il faut des masses considérables pour que l'effet soit sensible, elle est souvent négligée. Nous ne la considérerons pas ici.

Ajoutons qu'en mécanique classique la masse passive d'un corps ne se couple pas avec sa propre masse active contrairement à la relativité générale.

Le principe de Mach

Le principe d'équivalence va donner lieu à une interprétation « gravitationnelle » de la masse inerte par Mach : La masse inerte d'un corps résulte de l'interaction de ladite masse avec toutes les masses de l'univers .

Ceci est corroboré expérimentalement par la phénoménologie d'équipements inertiels, comme le pendule, le gyroscope, qui ne semblent pas (ou très peu) dépendre des masses proches mais bien de l'univers entier.

Ainsi un pendule sur Terre lancé dans une direction va la conserver nonobstant le mouvement de rotation de la Terre et l'influence du Soleil et de la galaxie.

Masse inertielle d'impulsion

Ceci pose le problème de l'inertie, d'un corps isolé ou dans une théorie qui ne traite pas la gravitation qui, d'après ce principe, devrait être nulle.

En mécanique classique, rappelons qu'on définit la masse inerte m d'un corps par la loi de Newton $f = m.\gamma$, où f est la force et γ l'accélération du corps de masse m qui est la masse inerte.

On peut aussi définir la masse inerte par la conservation de l'impulsion, lors d'un choc élastique ($m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$) où m_1 est la masse de l'objet 1 de vitesse v_1 avant le choc et v'_1 après et m_2 la masse de l'objet 2 de vitesse v_2 avant le choc et v'_2 après. Cette relation montre que le rapport des variations de vitesses ($v_1 - v'_1$) et ($v_2 - v'_2$) est inversement proportionnel aux masses m_1, m_2 , ce qui permet, à partir d'une masse de référence, de définir les autres.

Relativité et inertie

Cette définition a une portée plus générale (en particulier utilisable en relativité restreinte, pour la collision des particules). La relativité générale est une théorie de l'inertie puisque son principe fondateur, le principe d'équivalence, est un principe d'inertie.

La représentation géométrique de la théorie ne fait que mettre en œuvre de manière très élégante et simple ce principe : Les géodésiques de cette géométrie représentant l'espace-temps sont les lignes du mouvement des corps.

En effet, en relativité générale si on ne considère que l'interaction gravitationnelle (à l'exclusion des autres), la matière- énergie ne peut avoir qu'un mouvement géodésique. L'univers décrit par la relativité générale est un univers inertiel, par construction

Qu'est-ce l'énergie?

Ce concept qui nous paraît familier est en fait la manifestation physique du temps

L'énergie

L'énergie est un élément vital dont nous avons une idée assez extérieure, par la consommation qu'on en fait qui résulte d'un transfert d'une source disposant d'une énergie potentielle, vers une destination, de la centrale électrique vers l'aspirateur, via le réseau électrique et la prise de courant domestique, par exemple.

On distingue, en général, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique.

En relativité, l'énergie est la composante temporelle du 4-vecteur impulsion. C'est la grandeur physique associée au temps.

En mécanique quantique, l'énergie E dans l'équation de Schrödinger est associée à l'opérateur $i\hbar\partial_t$, agissant sur la fonction d'onde ψ . L'énergie est la mesure de sa variation par rapport au temps, (cf A-3).

L'énergie

Ceci montre que les équations, des deux théories fondamentales de la science moderne, la relativité et la mécanique quantique associent l'énergie au temps.

La signification de cela est que, sans transfert d'énergie, le temps physique ne s'écoule pas.

Ce transfert d'énergie intervient, entre autres, dans notre métabolisme, le temps qui passe que nous percevons n'est possible que parce que de l'énergie dans notre corps est consommée.

L'énergie

Cet exemple montre que nous avons besoin d'un minimum d'énergie pour survivre, fournie par nos aliments (le carburant) et aussi l'oxygène de l'air (le comburant) pour une partie.

Le débat public, aujourd'hui, est sur notre consommation globale qui va bien au-delà. La conscience que le progrès entraîne, si on n'y prend pas garde, une boulimie d'énergie n'est pas nouvelle.

Pour certains la seule prédiction fiable pour l'avenir qu'on pouvait faire, c'était que l'énergie consommée augmente avec le progrès.

Nous avons largement utilisé l'énergie fossile avec les inconvénients qu'on connaît. Cette énergie résulte de réactions chimiques (combustion par exemple) ayant des rendements énergétiques adaptée à nos besoins essentiels.

L'énergie

Nous verrons que la relation $E = Mc^2$, si elle ne fournit pas une solution totale à nos besoins en énergie, en repousse les limites puisque, pour une même quantité de matière, elle pourrait fournir jusqu'à un milliard de fois plus d'énergie !

Dans les énergies « renouvelables » on trouve l'énergie solaire soit sous forme électrique (photovoltaïque), soit sous forme thermique. Soulignons que l'énergie hydro-électrique, l'énergie éolienne, sont aussi des énergies solaires indirectes, car c'est le Soleil qui évapore l'eau qui va ensuite s'écouler et c'est lui qui crée, par des températures différentes en différentes régions du globe, les vents.

Elles ne sont pas renouvelables à l'infini, mais l'échelle de l'histoire du Sapiens, on a le temps de voir venir. Il est plus à craindre que d'autres menaces, humaines ou célestes n'abrègent cette échéance.

La quantité de mouvement

En physique classique la quantité de mouvement notée P est un **vecteur spatial** égal au produit de la masse m d'un corps par son vecteur vitesse v , par rapport à l'observateur qui la mesure: $P = mv$. Les lois de conservation de cette quantité sont liées à **l'invariance de la physique** par rapport au choix d'une position, d'après le théorème de E. Noether (qui s'applique aussi en relativité):

Un système isolé a une quantité de mouvement constante. Si des forces internes le scindent en parties, la somme des quantités de mouvement des parties est égale à sa quantité de mouvement initiale.

En relativité, théorie de l'espace-temps, on ne peut pas garder la forme newtonienne, il faut utiliser à la place: $P = \gamma mv$, **formule que nous utiliserons**, où γ , facteur de Lorentz, introduit l'effet du temps. Voir annexe A-4: Fondement de cette formule et un exemple. .

La quantité de mouvement



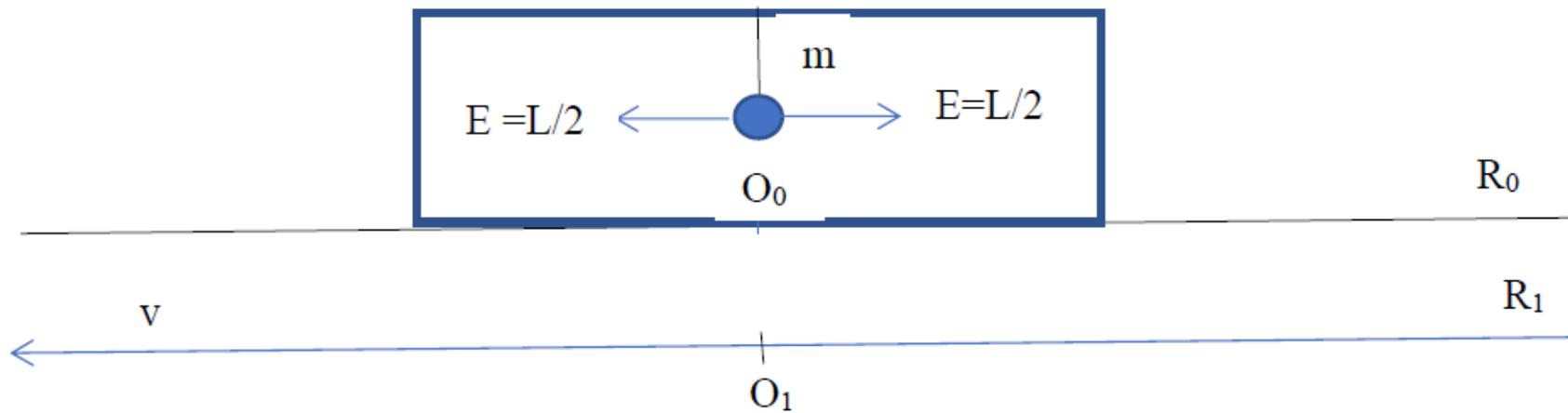
Le pendule de Newton illustre la conservation de la quantité de mouvement

$E = Mc^2$: Une démonstration

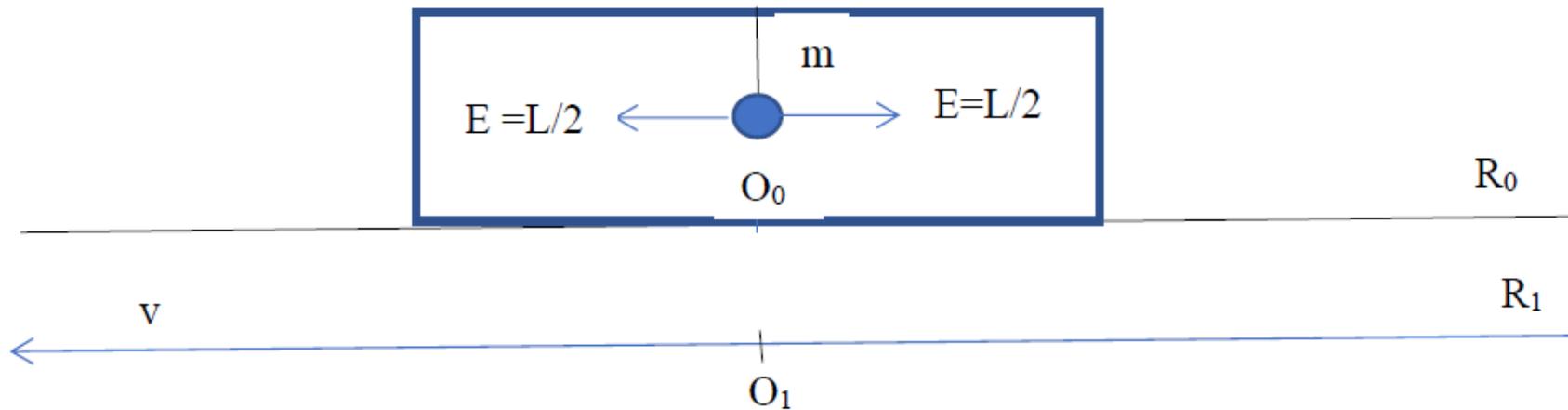
Plaçons-nous dans le contexte de la relativité restreinte et prenons comme exemple cette démonstration fondée sur une expérience de pensée, qui utilise le même principe que celle d'Einstein. (Yves-54)

Soit un corps de masse m suspendu dans une boîte par un fil non-conducteur. Soudain il émet deux impulsions lumineuses (photons) d'énergie $E = L/2$ dans deux directions opposées. Tout d'abord, considérons le point de vue d'un observateur O_0 situé dans le repère de référence R_0 , dans lequel la boîte se trouve au repos.

Rappelons qu'en relativité la masse m est un 4-scalaire invariant.



$E = Mc^2$: Une démonstration



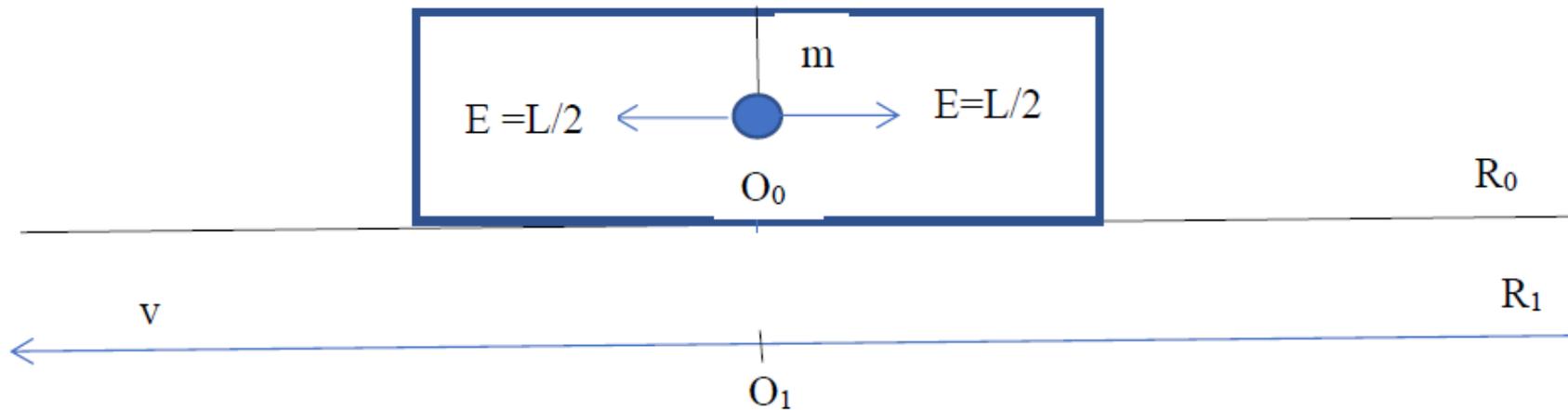
La quantité de mouvement du faisceau émis vers la droite est $p = L/2c$, celle du faisceau émis vers la gauche est $-L/2c$. La relation entre l'énergie d'un rayonnement L et sa quantité de mouvement L/c a été définie par Maxwell (puis Poincaré).

La conservation de la quantité de mouvement total P implique que le corps demeure au repos dans la boîte donc :

Dans R_0 , avant l'émission : $P = \gamma m v = 0$, car $v = 0$

Où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz, bien connu.

$E = Mc^2$: Une démonstration



Dans R_0 , après l'émission on a :

$$P = m'v + L/2c - L/2c = 0$$

car $v = 0$.

Où la masse du corps après l'émission des photons est notée m' .

L'idée, pour relier la masse à l'énergie, va être d'évaluer la perte de masse $m' - m = \Delta m$ de la masse m quand elle perd une énergie L .

E = Mc²: Une démonstration

Les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères inertiels ! Attention, ceci ne veut pas dire que tout le monde va obtenir les mêmes résultats, ce n'est pas le cas, mais que ces résultats vont obéir aux mêmes lois: Ici la loi, c'est la conservation de la quantité de mouvement relativiste.

A ce titre, dans un 2nd temps, prenons le point de vue d'un observateur O_1 dans un repère R_1 se mouvant à la vitesse uniforme v , vers la gauche, par rapport à la boîte.

Nous allons utiliser une équation, donnée par Einstein en 1905 qui décrit la transformation relativiste de l'énergie E des rayons lumineux, qui s'écrit:

$$E' = E \left(\frac{1 - \cos(\theta) \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$E = Mc^2$: Une démonstration

Où E est l'énergie du rayon lumineux dans le référentiel inertiel R_0 où il est émis, E' l'énergie mesuré dans un référentiel R_1 animé d'une vitesse constante v par rapport à R_0 et faisant un angle de θ avec R_0 . Ceci se déduit simplement de l'effet Doppler relativiste, l'énergie d'un photon étant proportionnelle à sa fréquence.

Dans le repère de l'observateur de R_1 , la conservation de la quantité de mouvement avant et après émission s'exprime par:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{L}{2c} \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \pi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{-L}{2c} \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

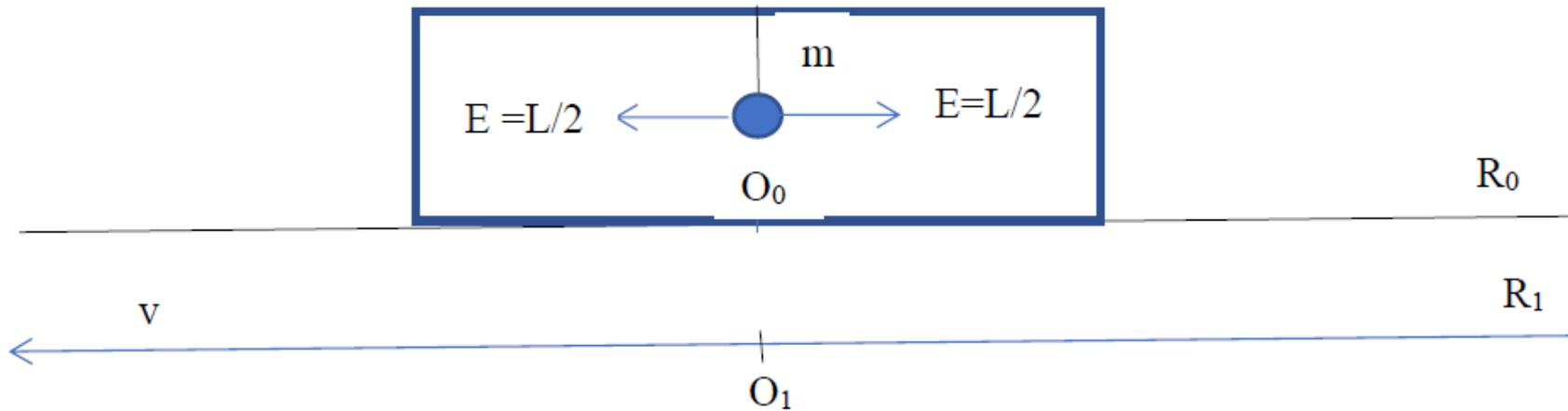
Quantité de mouvement
du corps avant émission

Quantité de mouvement
du corps après émission

Quantité de mouvement
du photon droit

Quantité de mouvement du
photon gauche

$E = Mc^2$: Une démonstration



Dans la figure ci-dessus, $\theta = \pi$, pour le train droit (direction du photon opposée à v) et $\theta = 0$ pour le train gauche (même direction que v).

E = Mc²: Une démonstration

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{L}{2c} \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \pi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{-L}{2c} \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Quantité de mouvement
du corps avant émission

Quantité de mouvement
du corps après émission

Quantité de mouvement
du photon droit

Quantité de mouvement du
photon gauche

Comme l'émission symétrique des photons laisse la boîte immobile dans le repère R_0 , sa vitesse relative v dans R_1 reste la même et comme $\cos(\pi) = -1$, on obtient

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (m - m') = \frac{L}{2c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\left(1 - \frac{v}{c} (-1) \right) + \left(- \left(1 - \frac{v}{c} \right) \right) \right) \rightarrow$$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (m - m') = \frac{L}{2c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(2 \frac{v}{c} \right) \rightarrow \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (m - m') = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{L}{c^2}$$

$E = Mc^2$: Une démonstration

En simplifiant, on obtient:

$$(m - m') = \Delta m = L/c^2$$

Comme l'énergie E libérée par l'émission des photons est égale à L , on déduit que l'énergie libérée par la variation de masse Δm vaut :

$$E = \Delta m c^2$$

CQFD. Nous constatons que c'est parce que le phénomène doit satisfaire les règles de la relativité restreinte (les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels) que le terme c^2 , s'introduit dans la formule.

Bien entendu ce résultat de relativité restreinte est aussi applicable, localement, en relativité générale.

E = Mc²: Une démonstration

Cette démonstration a l'intérêt de s'appuyer sur une expérience de pensée. Il y en a quelques unes de ce type, mais celle là est la plus simple et surtout la plus explicite.

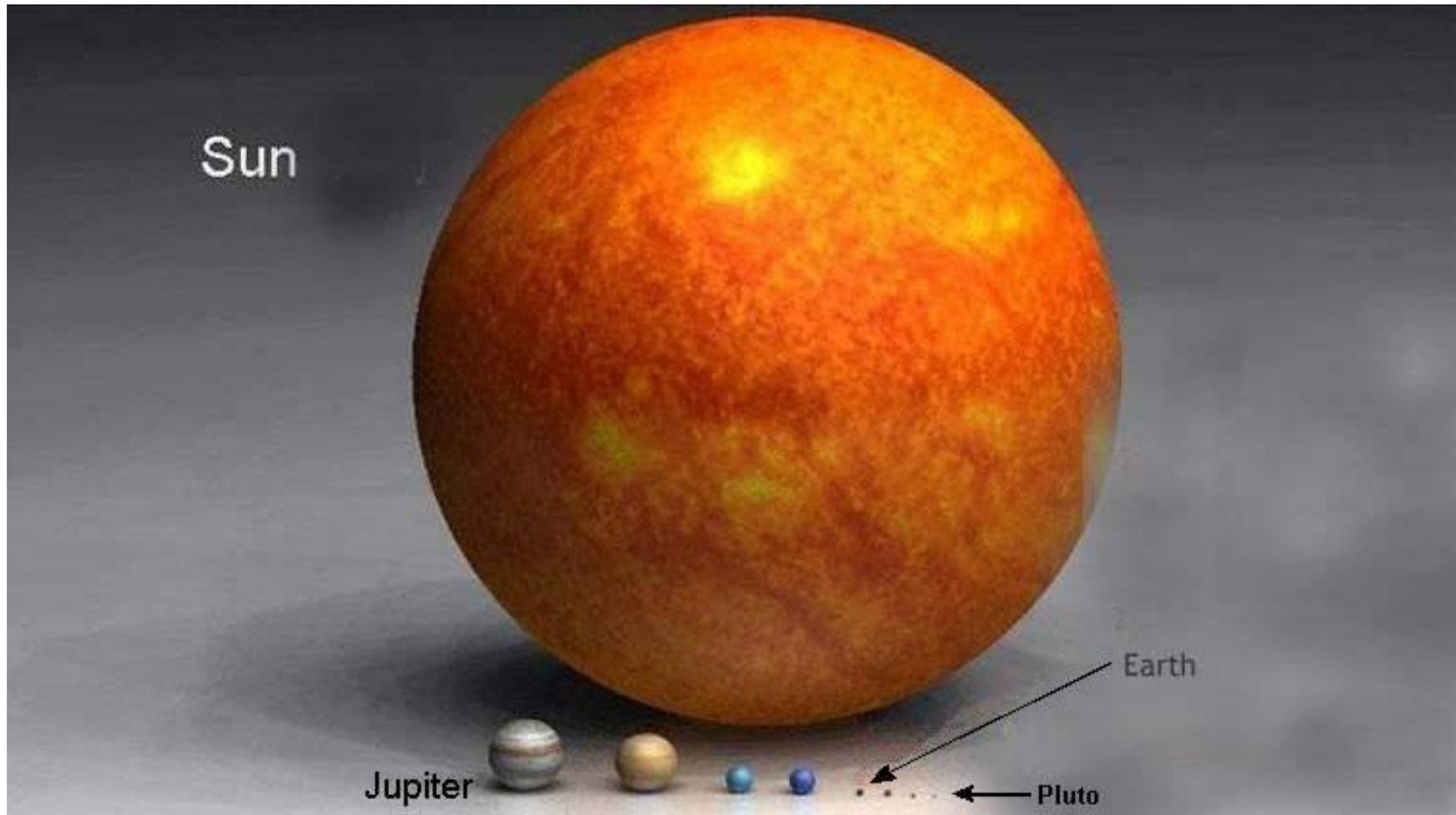
Bien entendu aujourd'hui on ne démontre pas cette formule dont la forme générale est:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

de cette manière, mais en quelques lignes, en utilisant le formalisme de la relativité, dans lequel cette relation est impliquée.

Cette démonstration est donnée en annexe A-2

Le Soleil est une étoile, comme celles qu'on voit la nuit, mais qui est beaucoup plus près de nous..



C'est une boule de gaz (hydrogène) dont le cœur est en fusion. Sa taille est gigantesque, son rayon vaut 100 fois celui de la Terre.

Le mystère de l'énergie du Soleil

Quelle est la puissance du Soleil lui-même ?

Combien de temps brillera-t-il, avant d'épuiser son carburant ?

Quel carburant utilise t'il ?

Depuis quand transmet-il son énergie ?

Au début du 19^{ième} siècle, on a naturellement envisagé le charbon, mais cela ne lui assurait que quelques milliers d'années.

Le premier à considérer sérieusement ces questions fut le grand physicien allemand **Hermann von Helmholtz**, qui soulignait en 1854 que **la seule gravité du soleil** pouvait lui assurer une importante quantité d'énergie.

Le mystère de l'énergie du Soleil

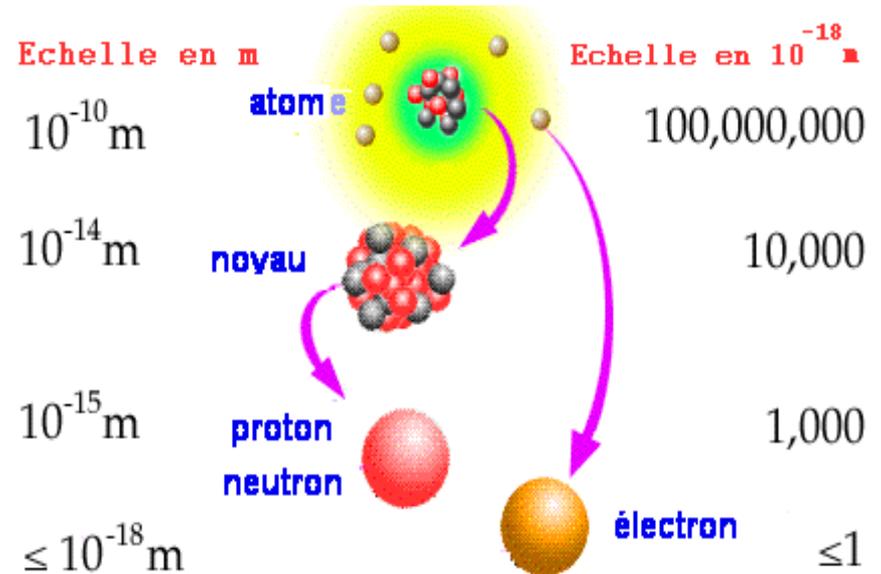
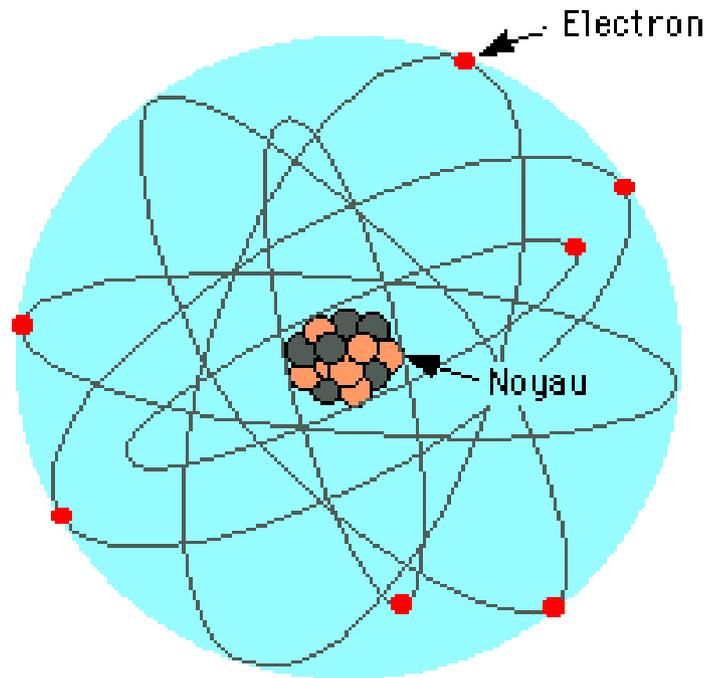
Si le Soleil se contracte parce que ses constituants se tassent peu à peu vers le centre, l'énergie libérée est suffisante pour qu'il rayonne longtemps : jusqu'à 20 millions d'années, calculait – il.

La radioactivité a ensuite été découverte :

Elle a permis d'estimer, que la Terre a plusieurs milliards d'années, un âge beaucoup plus grand que celui donné par Helmholtz, et que cette source d'énergie interne au noyau de l'atome, nouvellement découverte, pourrait correspondre aux besoins du Soleil.

On a d'abord envisagé la fission, mais plus tard, la composition chimique du Soleil a conduit à retenir la fusion.

Les atomes



Représentation schématique d'un atome avec son noyau et ses électrons, l'échelle n'est pas respectée, la taille de l'atome étant 100 000 fois plus grande que celle des nucléons.

Le noyau de l'atome

Protons et neutrons, appelés génériquement nucléons, forment un noyau atomique de dimension femtométrique, 10^{-15}m

Les protons étant chargés positivement, ils se repoussent au sein du noyau, mais l'intensité de cette répulsion électrostatique est inférieure à celle de l'attraction entre nucléons **induite** par l'interaction forte à des distances inférieures à 2,5 fm.

Les neutrons qui ne sont pas chargés, mais dont les quarks qui le composent sont sensibles à l'interaction forte, vont assurer la cohésion du noyau pour tous les atomes autres que l'hydrogène.

Soulignons que ce n'est pas directement l'interaction forte qui est à l'oeuvre car elle s'exerce entre les quarks, mais un effet résiduel du fait que les quarks dans un nucléon ne sont pas au même endroit.

Cohésion du noyau de l'atome

Avant de découvrir les quarks, cette interaction qui lie les nucléons était appelée force nucléaire. Ce n'est pas une interaction fondamentale. Elle peut être interprétée en termes d'échanges de **mésons** légers, comme les pions, à la différence de l'interaction forte entre quarks qui est interprétée par des échanges de gluons.

La cohésion du noyau résulte donc d'une énergie de liaison entre les nucléons. Il faut fournir de l'énergie pour séparer les constituants du noyau. Inversement lorsqu'on va fusionner des nucléons pour constituer un noyau cette énergie de liaison va être libérée. Pour être stable, il faut que le noyau ait une énergie inférieure à celle de la somme de ces constituants non liés (libres).

L'énergie de fusion nucléaire n'est pas l'énergie de la matière des nucléons ($E = Mc^2$), mais c'est l'énergie de liaison entre nucléons.

La fusion (thermo)nucléaire

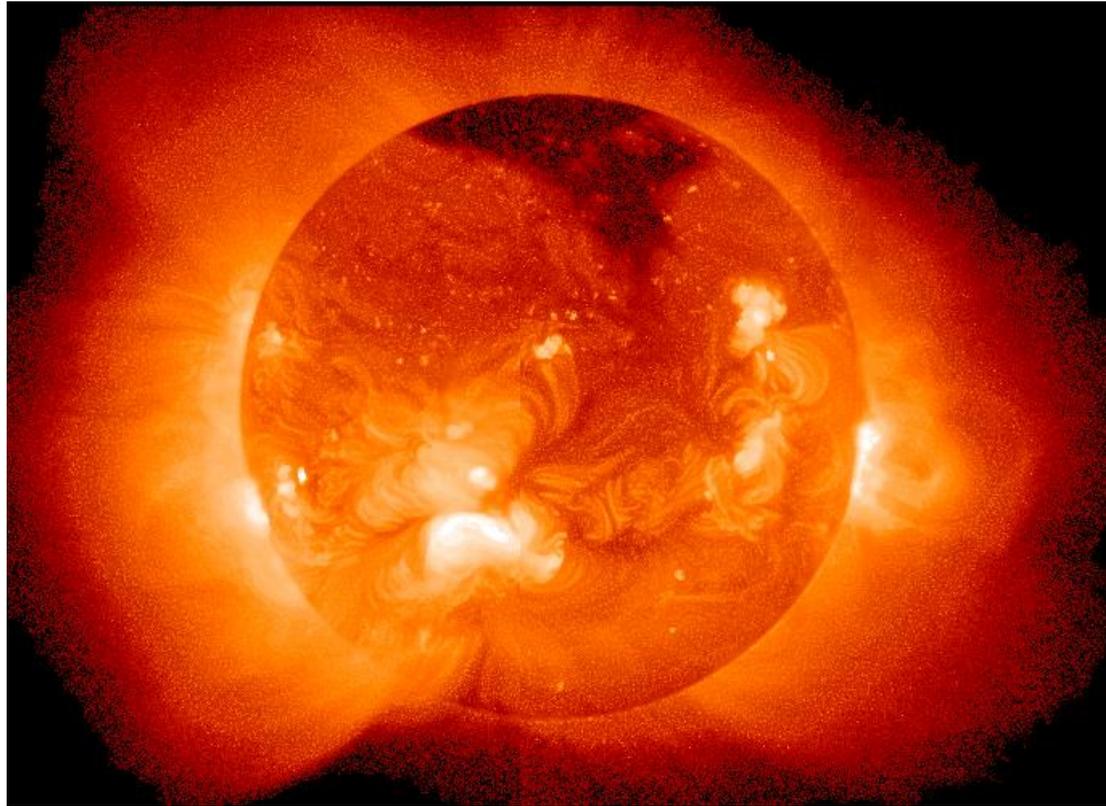
La **fusion nucléaire**, dite parfois **fusion thermonucléaire**, est un processus où deux noyaux atomiques s'assemblent pour former un noyau plus lourd.

Cette réaction est à l'œuvre de manière naturelle et longtemps stable, dans le Soleil et la plupart des étoiles de l'univers.

La fusion de noyaux légers dégage d'énormes quantités d'énergie provenant de la liaison des nucléons due à ce qu'on a appelé la « force nucléaire ».

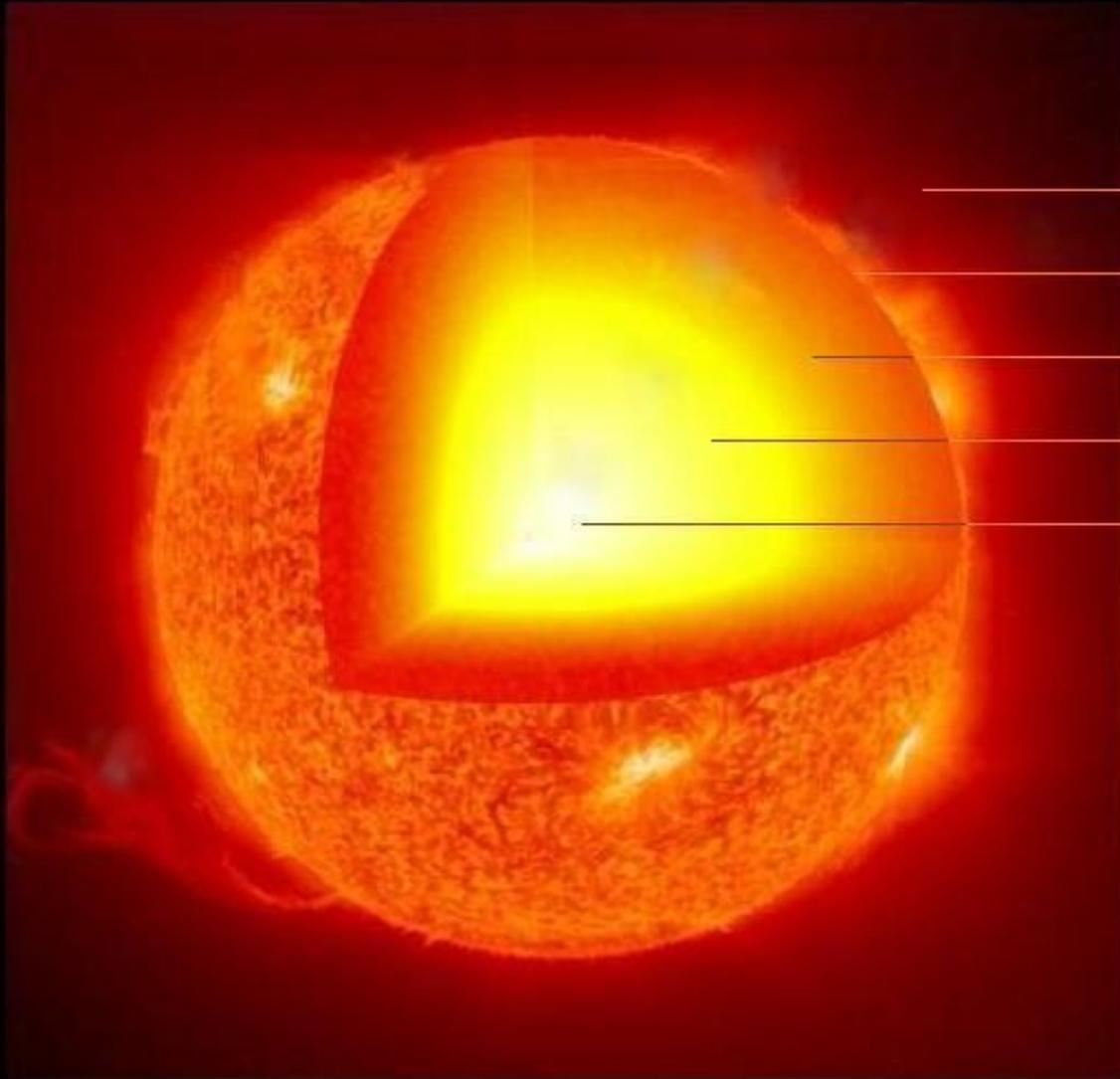
Elle est, avec la fission, l'un des deux principaux types de réactions nucléaires appliquées. Un de ses intérêts est de pouvoir produire théoriquement beaucoup plus d'énergie (de 3 à 4 fois plus), à masse de « combustible » égale, que la fission.

La fusion nucléaire source d'énergie du Soleil



Le Soleil, siège de nombreuses réactions de fusion nucléaire.

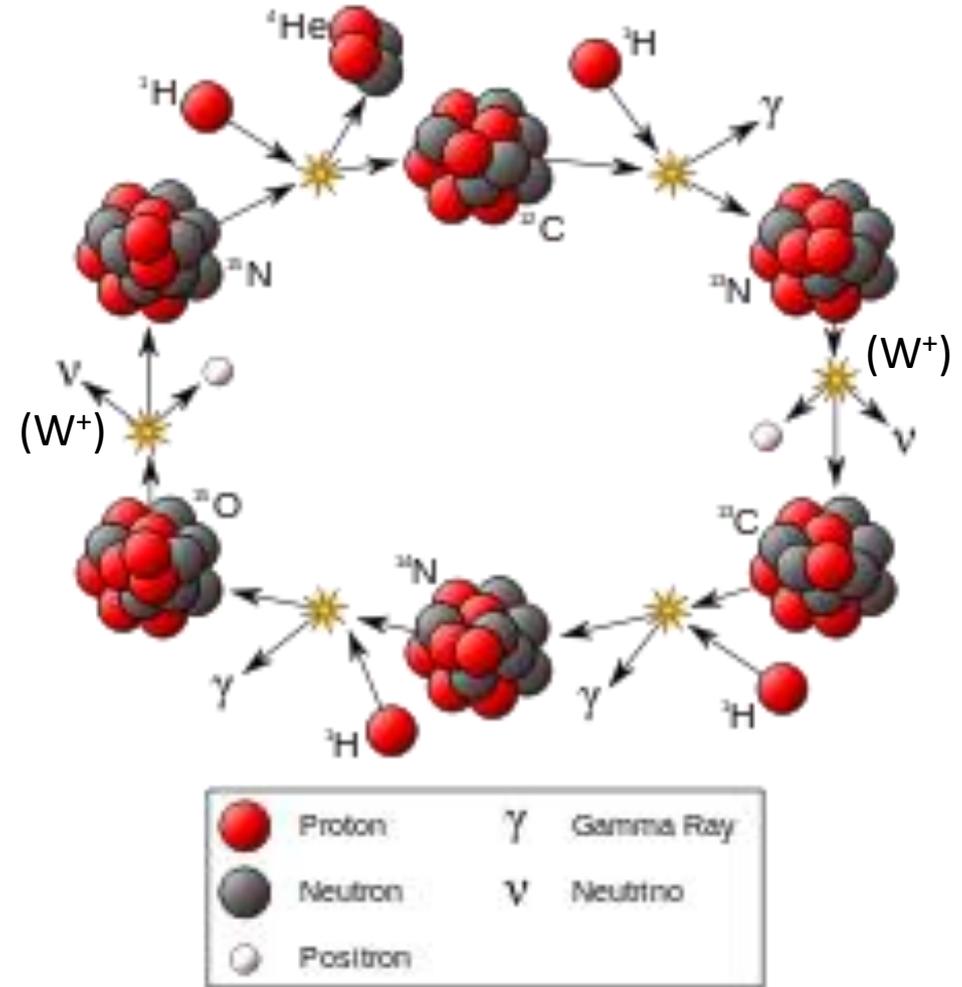
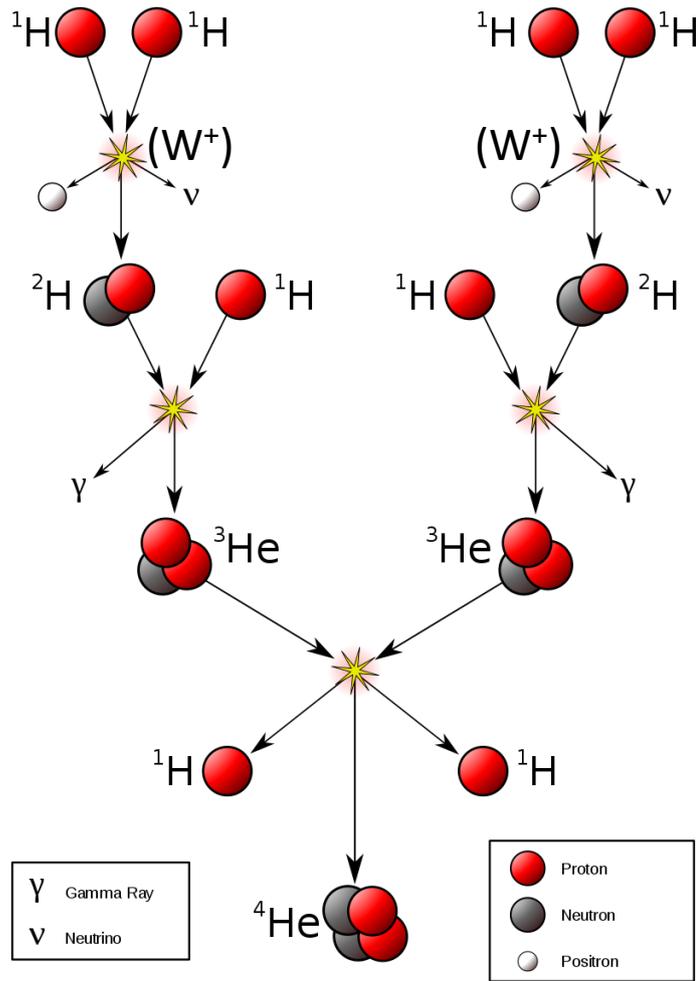
La structure interne du Soleil



Structure du Soleil en coupe

- Couronne solaire
- Photosphère
- Zone de convection
- Zone de radiation
- Cœur (ou noyau)

Réactions nucléaires du Soleil



C'est l'interaction faible qui permet la fusion proton-proton prédominante dans les étoiles d'une taille similaire ou inférieure à celle du Soleil.

Le cycle carbone-azote-oxygène prédomine dans les étoiles de masse supérieure à celle du Soleil.

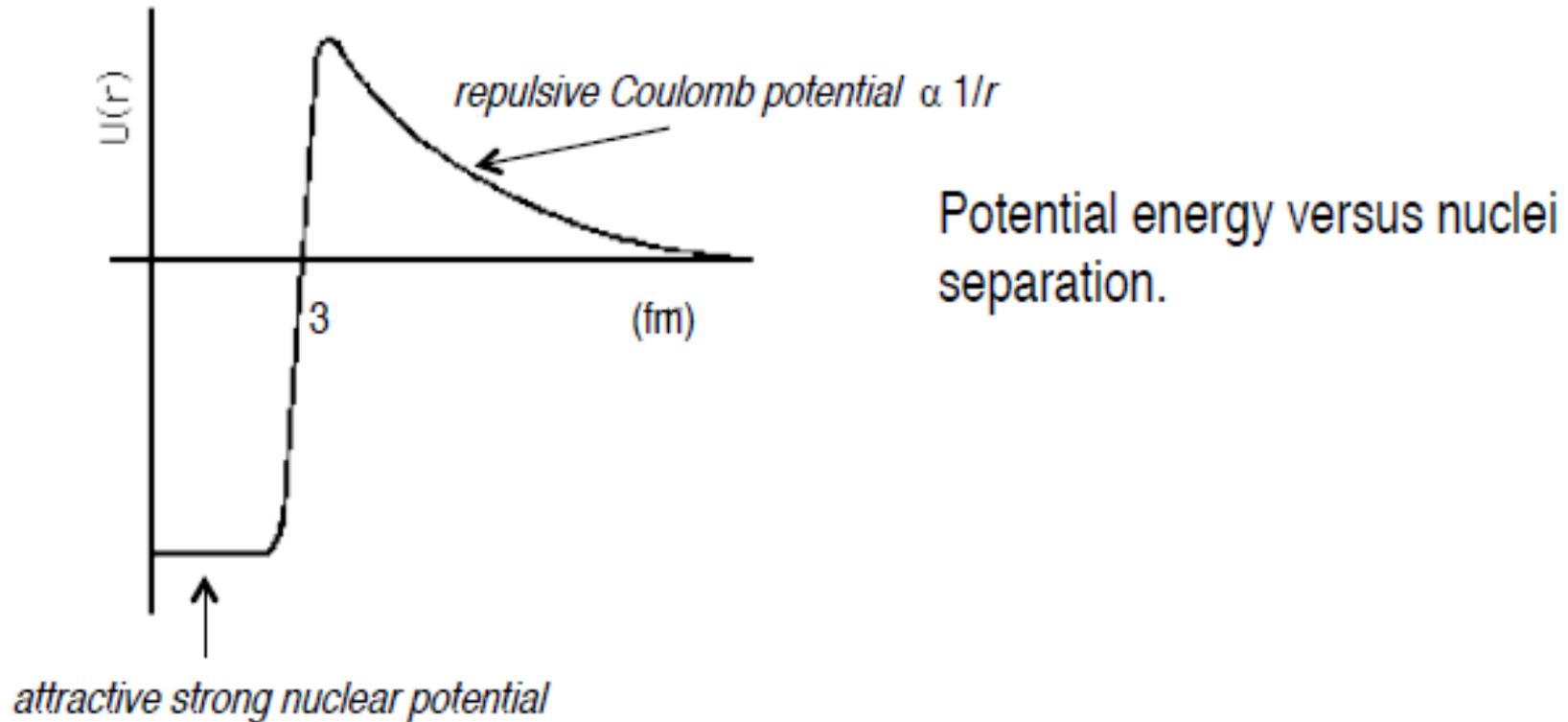
Réactions nucléaires du Soleil

Interaction entre protons

Il faut une température très élevée, c.a.d une très vitesse élevée des protons leur conférant une énergie cinétique très élevée, pour que ces réactions puissent se produire car, dans la réaction en haut, pour que 2 protons puissent se rapprocher suffisamment pour se rencontrer, il faut qu'ils puissent franchir une barrière de potentiel très élevée, du fait qu'ils se repoussent étant chargés tous les deux positivement.

En effet si la « force nucléaire » est à courte distance supérieure à répulsion électromagnétique cet écart n'est pas très important, comme en témoigne le fait que l'Hélium 2 (2 protons seulement) n'est pas stable.

Réactions nucléaires du Soleil



Pour fusionner deux charges positives doivent franchir la barrière de potentiel du champ électrique, à portée infinie, dont la force répulsive croît en $1/r^2$ pour atteindre la frontière du puits de potentiel où la force nucléaire domine (typiquement $3 \cdot 10^{-15}$ m, ce qui est 3 fois la taille du noyau).

La force nucléaire

La **force nucléaire**, qui s'exerce entre nucléons, est responsable de la liaison des protons et des neutrons dans les noyaux atomiques. Elle peut être interprétée en termes d'échanges de mésons légers, comme les pions.

Même si son existence est démontrée depuis les années 1930, les scientifiques n'ont pas réussi à établir une loi permettant de calculer sa valeur à partir de paramètres connus.

Elle est parfois appelée **force forte résiduelle**, pour la distinguer de l'interaction forte.

Cette formulation a été introduite dans les années 1970 en raison d'un changement de paradigme.

Auparavant, la **force nucléaire forte** désignait la force entre nucléons.

La force nucléaire

Après l'introduction du modèle des quarks, l'interaction forte a désigné les forces définies par la chromodynamique quantique, qui interagissent avec les quarks, en raison de leur charge de couleur. Les nucléons n'ayant aucune charge de couleur, la force nucléaire n'implique donc pas directement les gluons, particules médiatrices de l'interaction forte, mais plutôt d'autres processus.

Propriétés fondamentales

La force nucléaire est ressentie uniquement par les hadrons. Aux distances typiques de séparation des nucléons (1,3 fm), c'est une force attractive très intense. À ces distances, la force nucléaire est plus intense que la force coulombienne; elle peut donc vaincre la répulsion entre protons produite par la force de Coulomb à l'intérieur des noyaux atomiques.

La force nucléaire

Cependant, la force de Coulomb entre protons a une plus grande portée et devient la seule force significative entre protons quand ils sont séparés de plus de 3 fm. À de très faibles distances, la force nucléaire devient par contre fortement répulsive, ce qui maintient une réelle séparation entre nucléons.

La force nucléaire (force NN) est pratiquement indépendante du type de nucléons (neutrons ou protons). Cette propriété est appelée indépendance de charge.

La force NN dépend de l'orientation relative des spins des nucléons qui peuvent être parallèles ou antiparallèles.

La force NN possède une composante non centrale ou tensorielle. Cette partie de la force ne conserve pas le moment cinétique orbital, qui est une constante du mouvement produit par une force centrale.

Réactions nucléaires du Soleil

Le rôle essentiel des neutrons

Par contre la capture d'un neutron ne subit pas cette répulsion et au contraire elle est favorisée pour les neutrons de faible énergie.

Les neutrons jouent le rôle de ciment entre les nucléons. Sans eux il n'y aurait pas de noyau autre que l'hydrogène et pas de chimie, en particulier organique, donc nous ne serions pas là.

C'est le sauvetage in extremis de 1 neutron sur 7, au bout de 200s de carnage, lors de la nucléosynthèse primordiale, qui a permis que l'aventure se poursuive pour aboutir jusqu'à nous.

Rappel cosmologique

Cette fusion thermonucléaire dans les étoiles est possible parce que la nucléosynthèse primordiale, où c'était l'univers entier qui était en fusion (un spectacle autrement plus grandiose) a laissé suffisamment d'hydrogène pour que les étoiles puissent, bien plus tard, localement et plus modestement, finir le travail pour que nous puissions être là.

Si la nucléosynthèse s'était bien déroulée, tout l'hydrogène aurait été consommé et l'univers aurait été de fer: Fin de l'histoire!

La nucléosynthèse aurait pu démarrer vers $t \approx 1\text{s}$, (tous les temps sont donnés en temps cosmologique), où l'énergie de l'univers était de 1 Mev (10^{10} °K), car l'énergie de liaison des nucléons est de cet ordre de grandeur. Il n'en fût rien pour plusieurs raisons.

La nucléosynthèse contrariée

1-L'univers était en expansion très rapide: Pas facile de se rencontrer dans un milieu qui fuit de tous les cotés.

2-Le deutérium qui est un maillon incontournable dans la chaîne a un noyau fragile. Il peut être facilement détruit par des photons: C'est ce qu'on appelle la chicane du deutérium.

3- Justement des photons, il y en a un milliard par nucléon, suite à l'annihilation matière – antimatière, qui s'est produite à une température $T = 1 \text{ GeV}$ (à $t = 10^{-6} \text{ s}$) où seul 1 milliardième de la matière en excès, en violation des lois de la physique, a survécu.

A $t = 1 \text{ s}$, l'équilibre thermique à 1 MeV suit une statistique qui fait que les photons, de plusieurs MeV, sont bien plus nombreux que les nucléons, ce qui leur permet de casser les noyaux de deutérium, formés, dont l'énergie de liaison est seulement de 1 MeV .

t= 100s, le deuterium est stable

Il faudra attendre que l'âge de l'univers soit multiplié par un facteur 100, vers 100 s pour que la nucléosynthèse puisse être efficace. La température est alors de 100 KeV, l'univers s'étend moins vite et surtout où le bain de photons est moins énergétique. Le deuterium n'est plus détruit, il permet de produire de l'hélium.

Mais il est bien tard et, à cette température, la fusion de l'hydrogène devient poussive et finalement, à $t = 200s$, cette fusion va s'éteindre. Il n'y aura eu guère que 10% d'hélium de synthétisé. L'hélium incorporera et sauvera les neutrons rescapés des épisodes précédents où seulement 1 sur 7 ont survécu.

Après la nucléosynthèse primordiale, l'univers est composé de 90% de noyaux d'hydrogène et 10% de noyaux d'hélium et de traces ($< 10^{-7}$) d'autres éléments légers.

Le cosmos a sauvé les meubles

En laissant 90% d'hydrogène, l'univers préserve l'avenir pour que des grandes structures engendrant des étoiles avec leurs cortèges de planètes puissent se former.

En fusionnant les neutrons dans les noyaux d'hélium ce qui les stabilise, elle a sauvé les neutrons rescapés ce qui permet une chimie complexe et variée (Tous les noyaux sauf l'hydrogène nécessitent des neutrons).

Notons que c 'est la dissymétrie de probabilité des réactions ($A = p \rightarrow n + e^+ + \nu$) et ($B = n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$) qui devient importante lorsque la température baisse en dessous de quelques MeV, car le neutron plus lourd de quelques MeV, est alors très défavorisé et la réaction B devient très prépondérante au dépend de la réaction A, alors qu'à un GeV c 'était imperceptible.

La grosse frayeur des neutrons

Déjà à $t = 1\text{s}$ il ne restait plus que 1 neutron pour 3 protons et le carnage s'est poursuivi jusqu'à 1 neutron pour 7 protons à $t = 200\text{ s}$. De plus il est instable à l'état libre avec une période de 15 mn environ. Il y avait péril en la demeure pour les neutrons!

Ajoutons que l'excès de matière de 1 milliardième qui paraît arbitraire est un critère sensible. Si l'écart avait été notoirement plus faible, il n'y aurait pas eu de nucléosynthèse, le bain de photons encore plus peuplé aurait encore retardé l'échéance jusqu'à la rendre improductive. Si l'écart avait été notoirement plus grand, la nucléosynthèse aurait été trop efficace et le combustible hydrogène aurait été largement consommé ne laissant pas grand-chose pour la suite.

Notons aussi l'existence de la chicane du deutérium, maillon faible de la réaction de fusion, qui est un élément critique du processus!

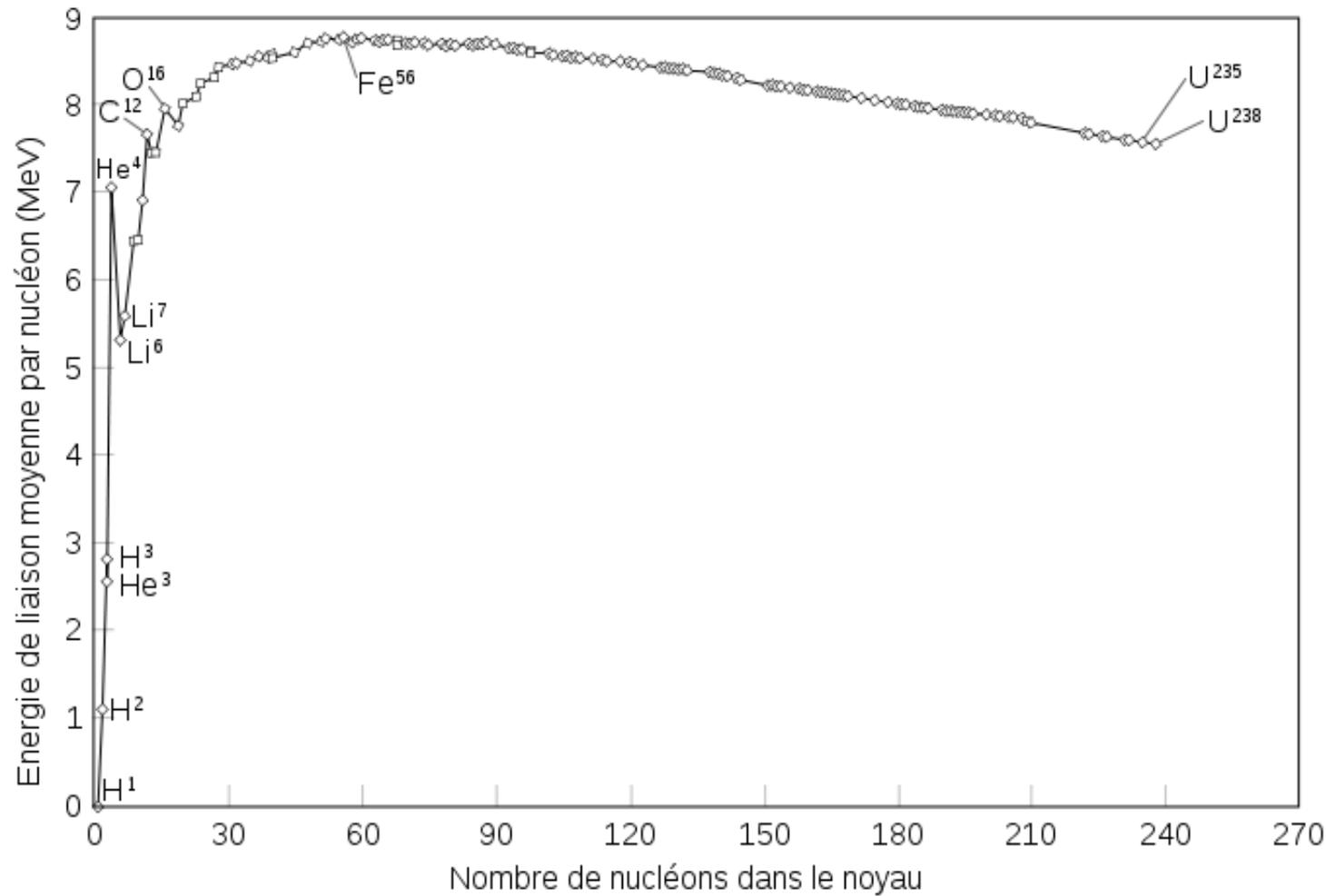
Un scénario salubre

Bref, cette nucléosynthèse qui paraît avoir avorté a en fait été très féconde, car elle a fait exactement ce qu'il fallait faire pour nous :

- Conserver 90% d'hydrogène qui sera la matière et le carburant des grandes structures fabricant les étoiles.
- Sauver les neutrons en les incorporant dans les noyaux d'hélium qui eux-mêmes par fusion thermonucléaire sont aptes à former des éléments comme le carbone, l'oxygène, l'azote, etc. pour permettre une chimie très diversifiée.

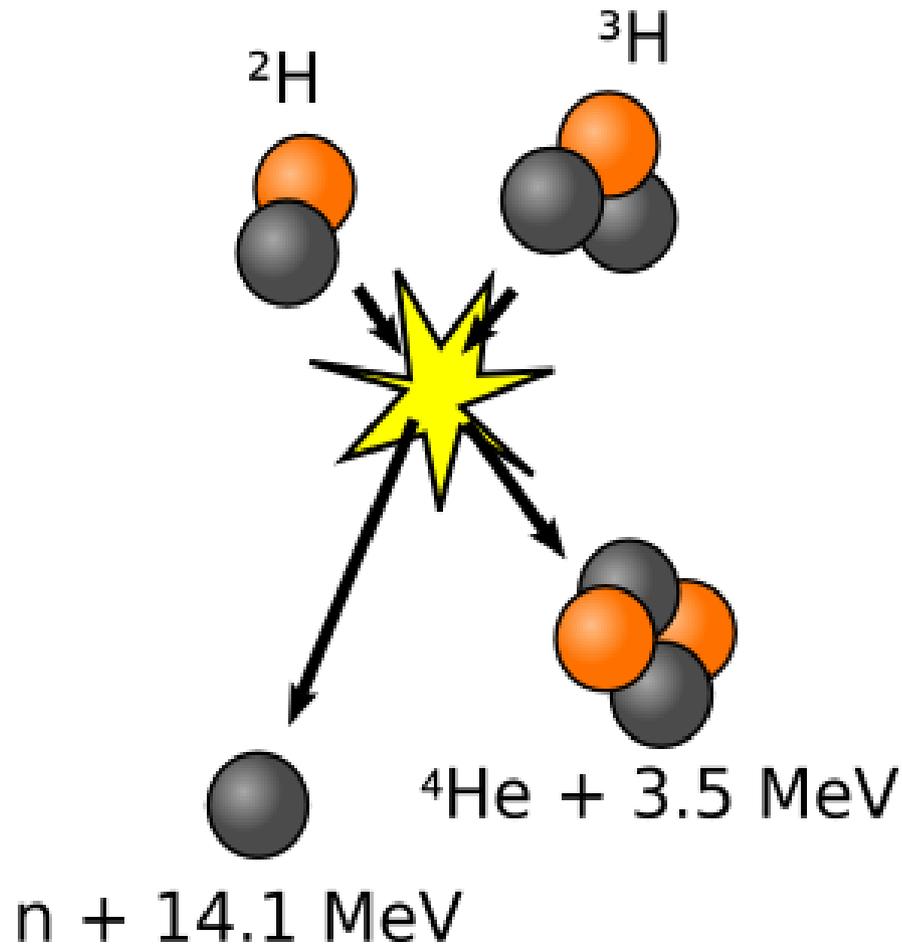
Ceci montre une fois de plus la sensibilité aux valeurs des paramètres dont une variation sensible aurait profondément modifié notre destin.

L'énergie de liaison du noyau



Dans l'hélium l'énergie de liaison est de 7 MeV par nucléon, soit 28 MeV pour le noyau. C'est cette énergie qui va être libérée lors de la fusion. C'est environ 10 millions de fois plus qu'une réaction chimique de combustion.

Autre exemple de réaction



Dans cette réaction, qui est une partie d'un cycle p+p, on a indiqué le détail de l'énergie cinétique libérée. Cette énergie cinétique va chauffer le milieu par collision avec les autres noyaux.

Equilibre hydrostatique

Le Soleil comme toute étoile est une boule de gaz en équilibre hydrostatique. En chaque point, la force de pression du gaz qui tend à le dilater compense exactement la force de gravité qui, au contraire tend à le contracter.

Cet état d'équilibre explique la forme sphérique du Soleil.

C'est au centre du Soleil que la température est maximale : 15,5 millions de degrés Celsius. La pression atteint 340 milliards de fois la pression atmosphérique terrestre. La densité est de 158 tonnes par mètre cube.

La température diminue progressivement à mesure que l'on se rapproche de la surface.

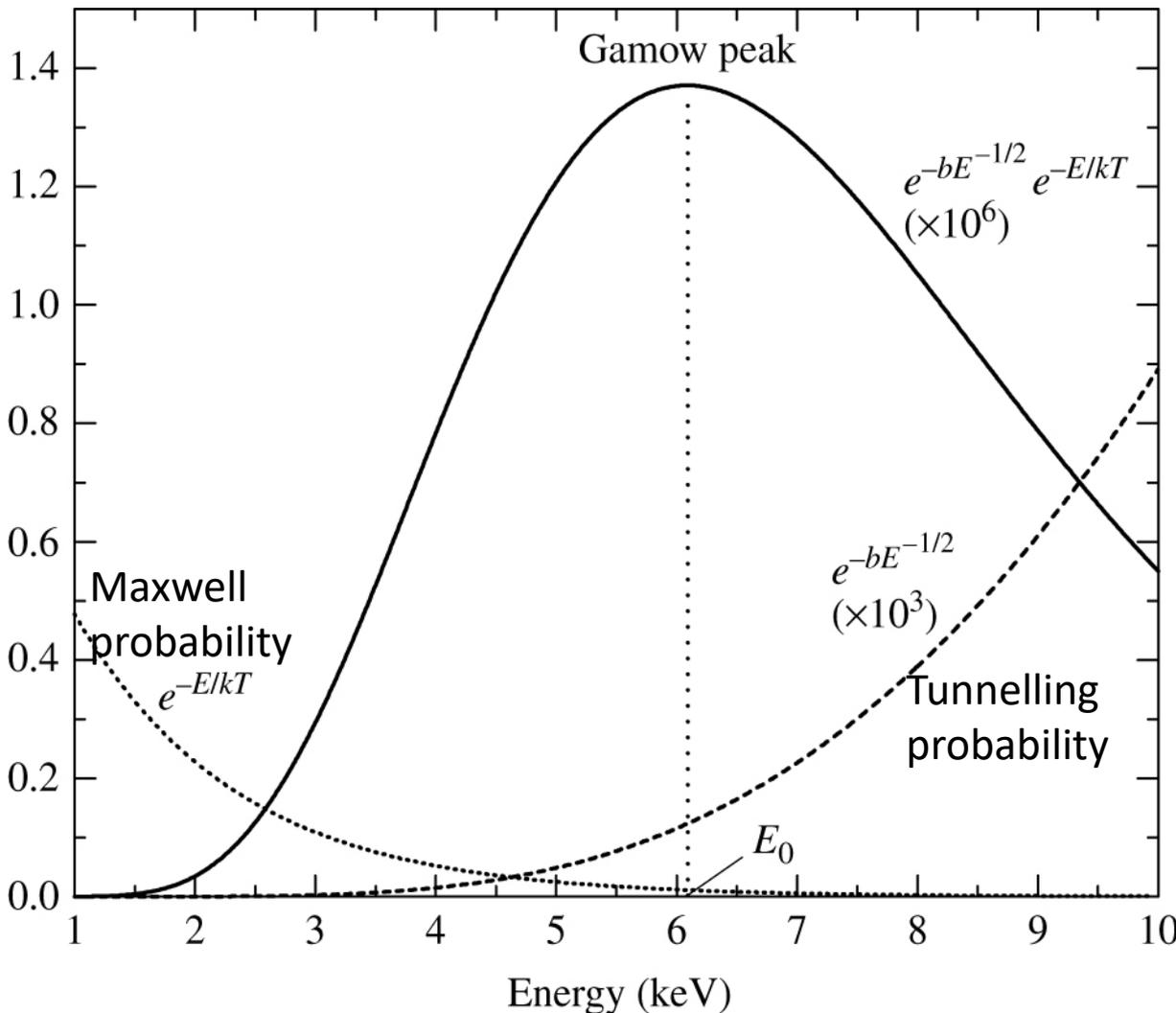
Equilibre hydrostatique

Dans la photosphère, épaisse de 500 km, d'où provient toute la lumière visible, la température est de 5800 °C.

Puis la température remonte pour atteindre environ 100 000°C dans la première couche de l'atmosphère raréfiée du Soleil épaisse de 2500 km que l'on appelle la chromosphère.

La température atteint 1 à 2 millions de degrés Celsius dans la haute atmosphère du Soleil, la couronne, qui s'étend sur quelques millions de km.

Une combustion poussive



L'énergie requise pour fusionner deux protons est de 1 MeV (10^{10} °K). Comme la température au centre du Soleil est de ($15,5 \cdot 10^6$ °K $\approx 1,6$ KeV, les réactions nucléaires ont du mal à se produire. Sans un effet tunnel, les réactions n'auraient pas démarrées. La combinaison de la distribution de Maxwell et de l'effet tunnel décrit par Gamow montre un maximum vers 6 KeV).

Une combustion poussive

Comment avec une température aussi basse le Soleil peut-il briller. La réponse est donnée par sa formation et l'équilibre hydrostatique qui s'est produit à l'allumage des réactions nucléaires correspondant à l'état qu'on constate aujourd'hui.

C'est sa masse énorme, qui compense la faible probabilité qu'une réaction de fusion thermonucléaire se produise.

L'énergie par kilogramme du Soleil est 0,2 mW par kg ($4 \cdot 10^{26} \text{W} / 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$). Celle du corps humain est d'environ 1W par kg. Nous voyons que nous brillons 5000 fois plus que le Soleil!

Ceci illustre l'argument précédent de l'importance de la masse. Soulignons que le fait qu'il brûle mal est plutôt un avantage pour nous, car ce faisant, il brûle très longtemps!!!

Bilan énergétique du Soleil

Il est le fournisseur quasi-exclusif d'énergie pour la surface de la Terre. Cette énorme boule gazeuse est constituée principalement d'hydrogène. La température en son centre s'élève jusqu'à 15,5 millions de degrés, ce qui fait que la fusion se fait très lentement.

La transformation de l'hydrogène en hélium par fusion nucléaire s'accompagne d'une libération colossale d'énergie par seconde :

$3,83 \cdot 10^{26}$ watts,

Soit environ **$4 \cdot 10^{17}$ réacteurs nucléaires modernes de 1 GW.**

La Terre, du fait de l'éloignement de son étoile (150 millions de kilomètres en moyenne) ne reçoit que 1 milliardième de cette énergie. Pourtant, cette énergie est suffisante pour entretenir la dynamique de la vie et du climat.

Bilan énergétique du Soleil

Pour donner une idée de l'énergie phénoménale du Soleil, supposons que nous captions son énergie juste pendant 1 seconde et que nous l'emmagasinions dans une batterie de grande capacité.

Cette seconde d'énergie contient:

$3,83 \cdot 10^{26}$ joules,

Cette énergie suffirait à alimenter la Terre pendant 32 ans exactement de la même manière que le Soleil le fait!

Bilan énergétique du Soleil

La formule $E = M.c^2$ nous montre que le Soleil transforme en énergie (il s'allège) à chaque seconde 4,26 millions de tonnes.

Il brûle environ 600 millions de tonnes d'hydrogène, car le rendement, est environ 0,7% de l'énergie de masse $E = Mc^2$ de l'hydrogène, puisque c'est l'énergie de liaison qui est libérée pour le bilan de la fusion de 4 protons en He.

L'énergie des photons de haute énergie (rayons X et γ) libérés lors des réactions de fusion met un temps considérable pour traverser les zones de rayonnement et de convection avant d'atteindre la surface du Soleil. On estime que le temps de transit du cœur à la surface se situe entre 10 000 et 170 000 ans.

Bilan énergétique du Soleil

Après avoir traversé la couche de convection et atteint la photosphère, les photons s'échappent dans l'espace, en grande partie sous forme de lumière. Chaque rayon gamma produit au centre du Soleil est finalement transformé en plusieurs millions de photons lumineux qui s'échappent dans l'espace.

Des neutrinos sont également libérés par les réactions de fusion, mais contrairement aux photons ils interagissent peu avec la matière et sont donc libérés immédiatement. Pendant des années, le nombre de neutrinos produits par le Soleil était mesuré plus faible d'un tiers que la valeur théorique : c'était le *problème des neutrinos solaires*, qui a été résolu en 1998 grâce à une meilleure compréhension du phénomène d'oscillation du neutrino.

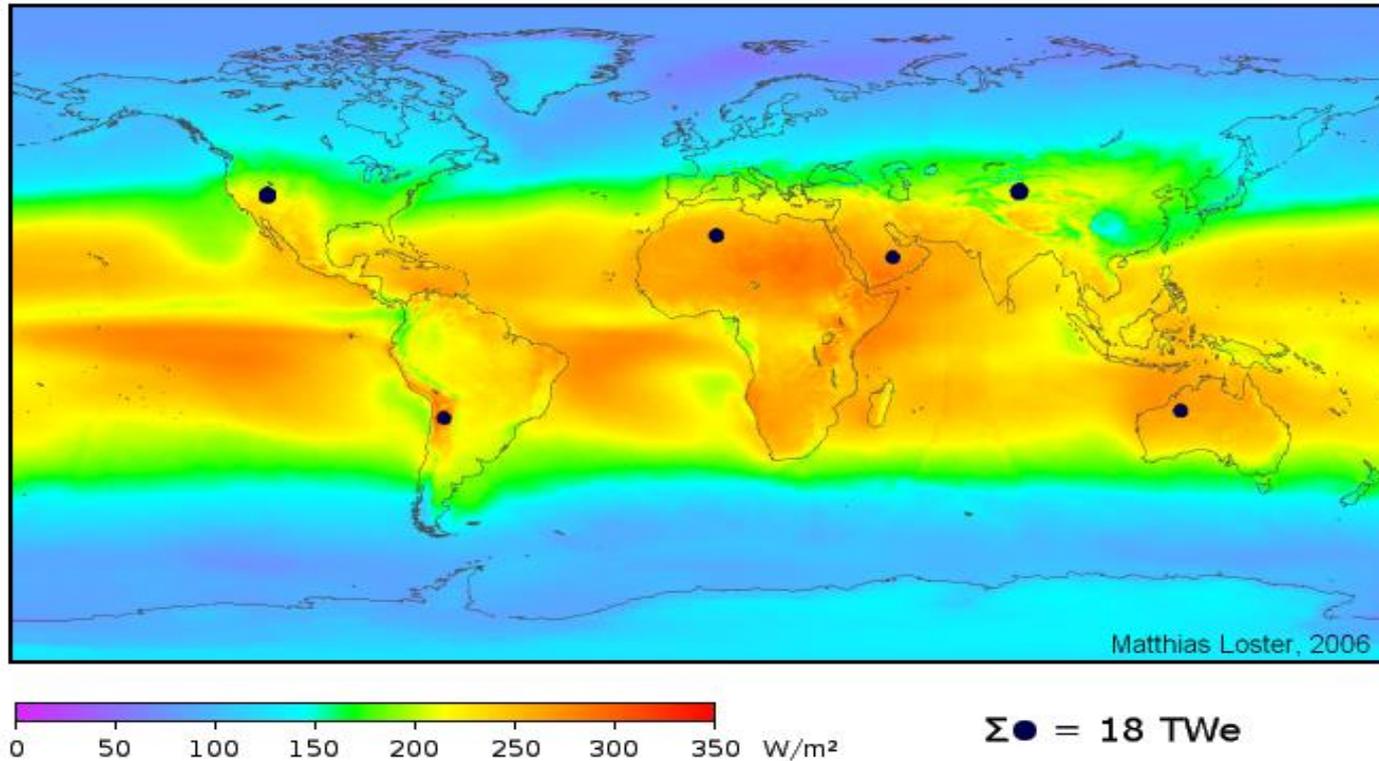
Bilan énergétique du Soleil

Depuis sa naissance (il y a 4,5 milliards d'années environ) il a transformé en hélium $8,5 \cdot 10^{28}$ kg d'hydrogène sur ses $2 \cdot 10^{30}$ kg (environ), soit environ la masse de 10 000 Terres (La Terre pèse $6 \cdot 10^{24}$ kg)!

Il a donc transformé en énergie moins de 0,035 % de sa masse (il a probablement perdu plus que cela en éjection de matière) et cela a concerné environ 6,7 % de son hydrogène (Rappelons que sa masse est composée de 75% d'hydrogène et de 25% d'hélium).

En période de grand froid EDF indiquait que la consommation électrique pouvait dépasser sa capacité de production qui est de 90 Gigawatts environ (dont 60% nucléaire). Cela correspond environ à la puissance solaire reçue sur environ 360 km².

Répartition de l'énergie



Si on néglige l'absorption par l'atmosphère, chaque mètre carré au niveau de l'orbite terrestre, face au soleil, reçoit, **environ 1KW maximum, le jour, utilisable par un capteur idéal (100% rendement)** perpendiculaire aux rayons solaires, et ceci ne représente que 345 W par m² terrestre en moyenne sur 24H.

Le Soleil et la Terre

Globalement la terre reçoit en permanence une puissance de 170 millions de gigawatt, elle en absorbe 122 (100 millions de centrales nucléaires) et réfléchit le reste.

Les régions qui sont relativement proches de zones de consommation importantes dans les pays développés disposant de la technique sophistiquée requise pour capter l'énergie solaire voient des réalisations de plus en plus importantes, comme dans le désert des Mojaves (Californie) où se trouve une centrale solaire d'une puissance totale de 354 MW.

Le Soleil et la Terre



Centrale solaire en Californie

Soleil, bronzage et le vivant

Il est agréable de se bronzer au Soleil.

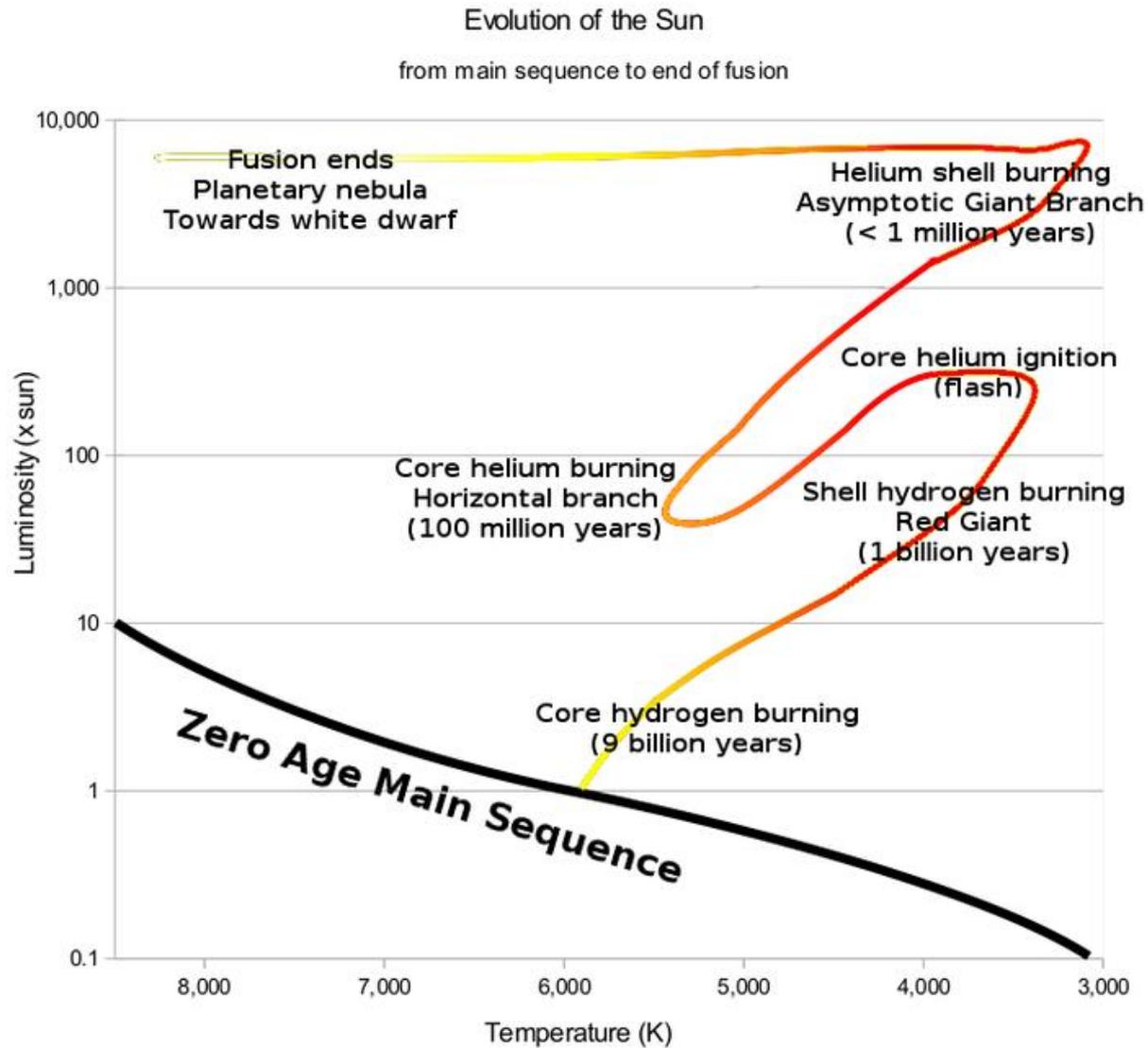
Mais si on savait que la plupart des rayons (les photons) sont à 5600 °K , (plus de $10\ 000\text{K}$ pour les UV) peut-être que cela en refroidirait certains! Comment se fait-il qu'on ne soit pas immédiatement calcinés?



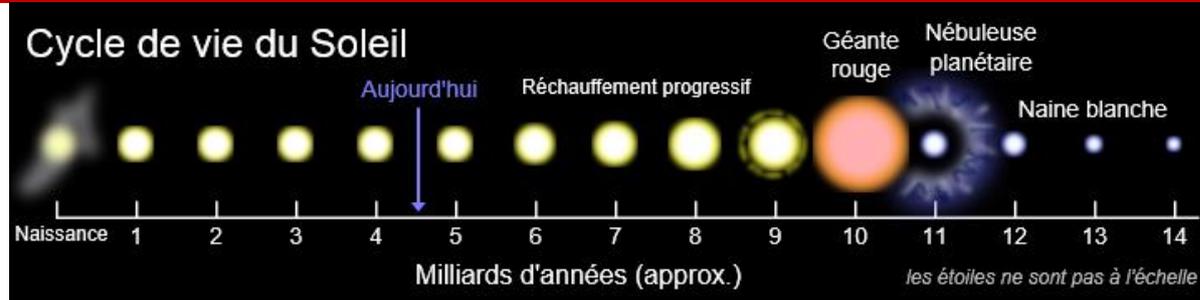
C'est que, sur Terre, le flux de photons est faible, les atomes de notre corps touchés par les photons, en relation avec les atomes voisins va leur transmettre la plus grande partie de leur énergie qui ce qui va conduire à un équilibre thermique à une température plus raisonnable.

Mais si on concentre ces photons par un miroir concave sphérique, ce qui augmente le flux, alors il y a à craindre! Cette température élevée des photons explique les températures élevées dans la thermosphère et l'ionosphère terrestre qui est un gaz très raréfié où l'équilibre thermique du gaz qui résulte des chocs entre les atomes est peu efficace. Cela explique aussi la température élevée de la couronne (gaz ténu) du Soleil où, près du Soleil, des photons encore plus énergétiques (UV, X) jusqu'à des millions de degrés, ont un flux égal à $25\ 000$ fois celui reçu sur Terre.

Le destin des étoiles



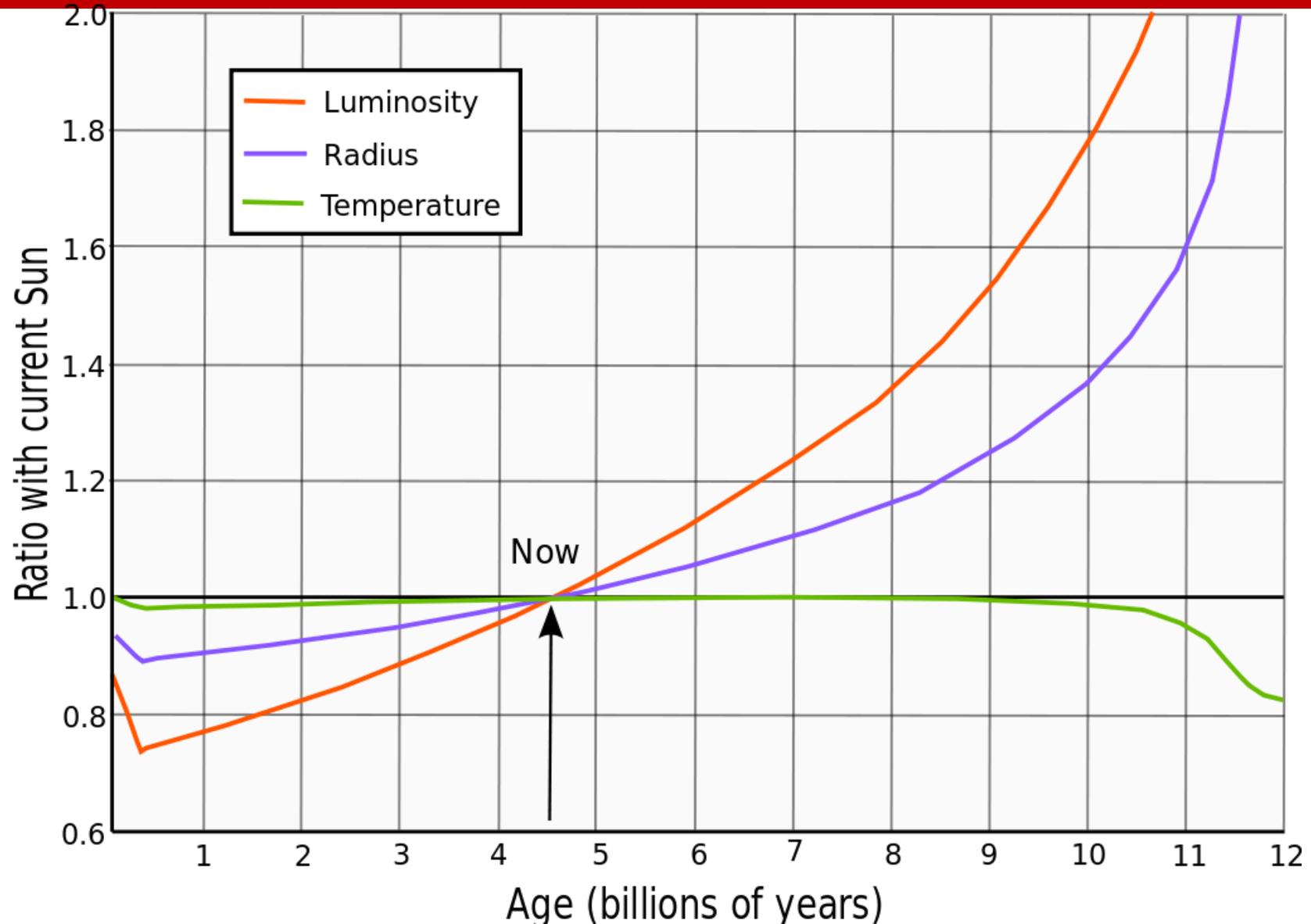
Origine et destin du Soleil



Il y a quatre milliards et demi d'années une étoile a explosé au voisinage (au sens cosmologique : $d \ll 10$ al) de la région où le Soleil (notre étoile) allait se former.

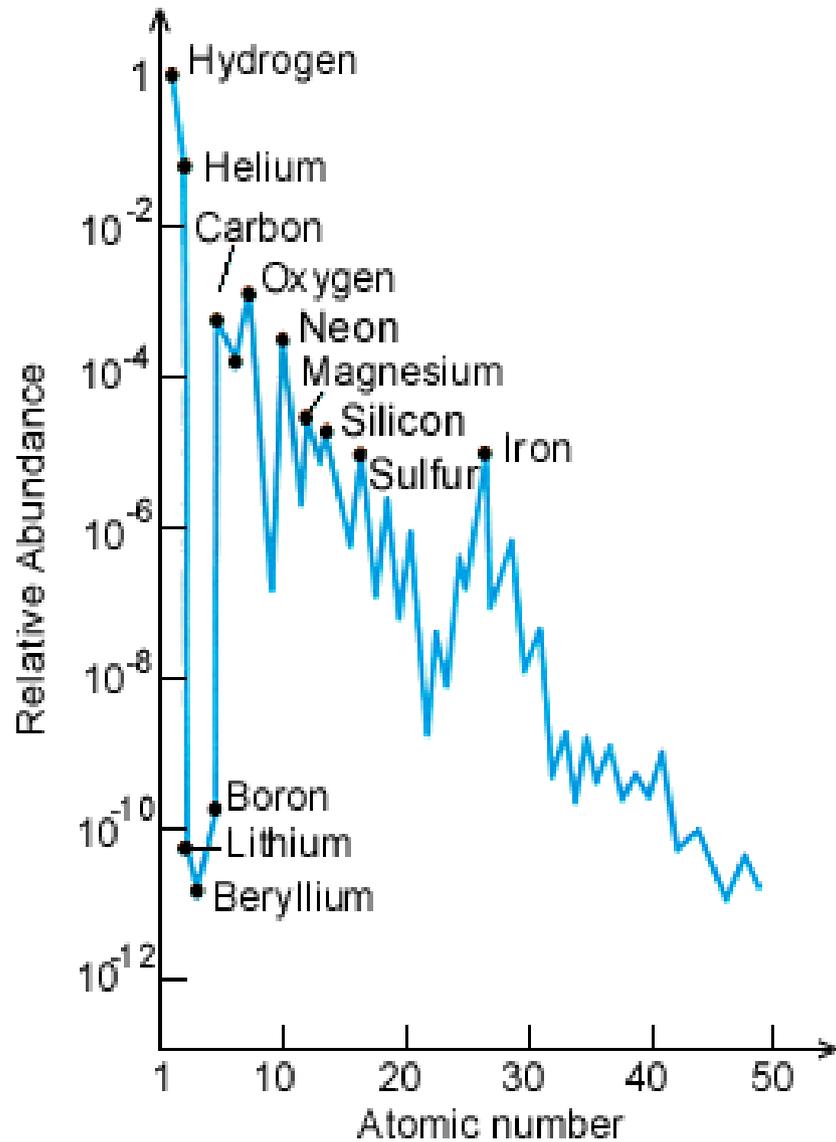
Elle aensemencé cette région en éléments chimiques variés (qu'on va retrouver dans le soleil et les planètes) et l'onde de choc de l'explosion va provoquer un effondrement (sur des centaines de millions d'années) du gaz conduisant à la formation du système solaire.

Origine et destin du Soleil



Évolution de la luminosité, du rayon et de la température solaires, comparés aux valeurs actuelles du Soleil. D'après Ribas (2010)

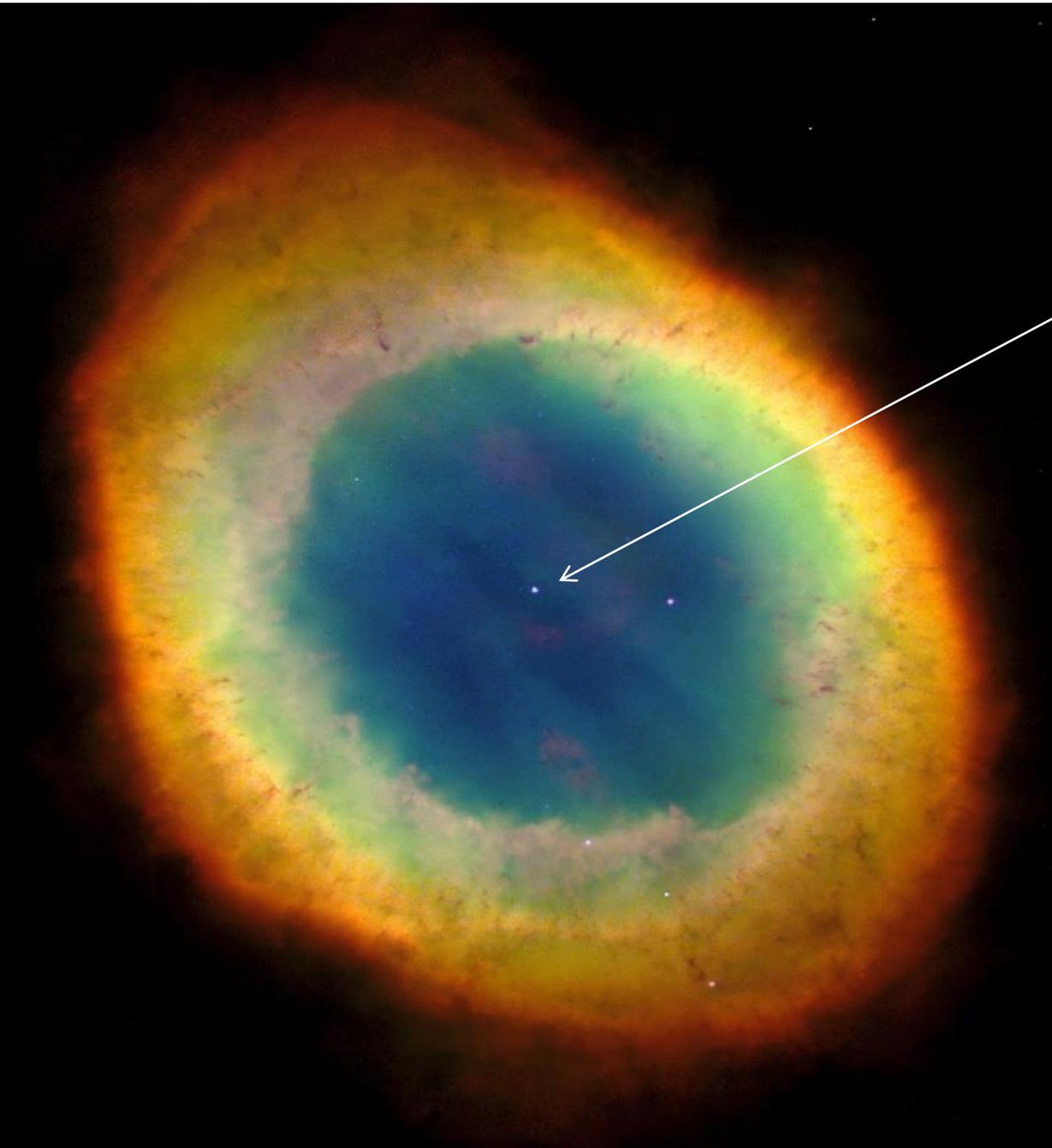
Origine et destin du Soleil



Les abondances des éléments chimiques dans le soleil. A noter que les éléments autres que l'hydrogène et l'hélium sont hérités du nuage résultant de l'explosion de la supernova génitrice.

On peut observer les quantités considérables de carbone (200 masses terrestres), d'oxygène (300 masses terrestres), présentes dans le Soleil, hérités d'une, sans doute petite partie du nuage, généré par la fusion explosive de la supernova.

La mort du Soleil



En fin de vie son enveloppe va s'étendre. Selon certains scénarios elle pourrait atteindre l'orbite terrestre et englober la Terre.

Le Soleil est devenu une naine blanche, entouré d'une nébuleuse formé par la matière qu'il a éjecté dans son cycle final.

Il a synthétisé du carbone et de l'oxygène, mais ils restent prisonniers dans la naine blanche.

Alors pourquoi parle-t-on d'énergie renouvelable alors que le Soleil n'est pas éternel?

Le Soleil s'est formé il y a environ 4 milliards d'années et on pense qu'il devrait encore briller de manière assez stable pendant plusieurs milliards d'années avant d'entamer un processus où il va évoluer. Après une phase de géante et supergéante rouge, il sans doute finir en naine blanche, cadavre d'étoile où les réactions nucléaires ont cessé.

Cette durée de vie « limitée » est très grande à l'échelle humaine (l'histoire humaine se compte en milliers ou dizaines de milliers d'années), c'est pourquoi on parle d'énergie renouvelable même si ce n'est pas tout à fait vrai.

Cela nous laisse un peu de temps pour contempler le Soleil se coucher avec l'espoir..



De le voir se lever le lendemain...



A-1 Démonstration d'Einstein

Résumé, avec *commentaires*, en italique de cette démonstration:

Einstein A. (1905) L'inertie d'un corps dépend elle de son contenu en énergie. Annalen der Physik, vol XVII, p 639-641. Référence [4]

Einstein va décrire une expérience de pensée où la perte d'énergie d'un corps par rayonnement va se faire de façon symétrique de manière à ce que cela ne modifie pas le mouvement du corps. Les vitesses ne variant pas, seule la masse va varier et on pourra ainsi associer la variation d'énergie (de type rayonnement) à la seule variation de masse du corps.

Dans un repère inertiel S_0 unidimensionnel (x, t) soit un corps M au repos d'énergie E_0 .

Dans un repère inertiel S_1 , unidimensionnel (x', t') animé d'une vitesse v par rapport à S_0 , ce corps a une énergie (mesurée) E_1 .

A-1 Démonstration d'Einstein

Le corps M émet « symétriquement » à un moment donné un rayonnement électromagnétique tel que l'énergie électromagnétique se partage en deux parties égales de directions opposées.

Ce type d'expérience de pensée sera repris par d'autres, Yves dans la démonstration que nous avons proposée, par exemple.

Le corps M perd de l'énergie ($E_0 \rightarrow E'_0$) dans S_0 et de même dans S_1 où ($E_1 \rightarrow E'_1$).

Il reste immobile dans S_0 , compte tenu de la symétrie de la solution et de ce fait sa vitesse ne change pas dans S_1 , elle reste égale à v . Dans S_0 , on peut écrire :

$$E_0 = E'_0 + [L/2 + L/2] = E'_0 + L \quad (1)$$

A-1 Démonstration d'Einstein

Dans un article précédent Einstein a établi la relation :

$$L' = L \cdot \gamma [1 - (v \cdot \cos \varphi / c)] \quad (2)$$

Avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ et où φ est l'angle de propagation du rayonnement par rapport à l'axe des x, (ici 0 et π).

En utilisant (2) pour calculer L' , L'' dans S_1 , en fonction de L et φ , on obtient :

$$E_1 = E'_1 + \{ (L/2) \cdot \gamma [(1 - v/c) + (1 + v/c)] \} = E'_1 + \gamma \cdot L$$

A-1 Démonstration d'Einstein

Einstein va considérer la variation d'énergie suivante, calculée à partir des équations (1) et (2) précédentes

$$(E_1 - E_0) - (E'_1 - E'_0) = L(\gamma - 1) \quad (3)$$

Dans le terme de gauche $(E_1 - E_0)$ représente l'énergie cinétique K_0 du corps M (dans S_1) avant émission du rayonnement et $(E'_1 - E'_0)$ l'énergie cinétique K_1 de M (dans S_1) après émission du rayonnement. Ces énergies sont définies à une constante près qui s'élimine dans la différence $(K_0 - K_1 = \Delta W)$ des énergies cinétiques.

La quantité à droite correspond donc à la variation d'énergie cinétique (ΔW) , liée à l'émission d'une énergie de rayonnement :

A-1 Démonstration d'Einstein

Einstein fait le lien fait entre énergie radiative et énergie cinétique.
On peut réécrire l'équation (3)

$$(E_1 - E_0) - (E'_1 - E'_0) = K_0 - K_1 = \Delta W = L (\gamma - 1) \quad (4-1)$$

Dans le cas où $v \ll c$, $(\gamma - 1) \approx v^2/2c^2$. Dans ce résultat, on néglige les termes supérieurs ou égaux à $(v^2/c^2)^2$.

On peut aussi écrire l'énergie cinétique sous sa forme classique $W = \frac{1}{2} m v^2$. Ainsi Einstein introduit la masse dans sa démonstration.

Einstein fait l'hypothèse qu'on peut utiliser la forme de la mécanique classique de la variation d'énergie cinétique, quand $v \ll c$:

$$\Delta W \sim \Delta (\frac{1}{2} m v^2) \quad (4-2)$$

$$\Delta (\frac{1}{2} m v^2) = \frac{1}{2} v^2 \Delta m \quad (4-3)$$

A-1 Démonstration d'Einstein

L'équation (4-3) tient compte que la vitesse n'a pas varié, donc que la variation d'énergie cinétique ne peut résulter que d'une variation de masse:

$$\frac{1}{2} v^2 \Delta m = \Delta W = L (\gamma - 1) : \quad (4-4)$$

en utilisant la valeur approchée de $(\gamma - 1 \approx \frac{1}{2} v^2/c^2)$ on obtient:

$$L (\gamma - 1) \approx \frac{1}{2} v^2(L/c^2) \quad (4-5)$$

C'est cette approximation, quand $v \ll c$, qu'on peut reprocher à Einstein puisque la portée de sa démonstration est limitée par cette condition, contrairement à celle de Yves qui est générale.

De ce qui précède, on déduit par identification et simplification:

$$\frac{1}{2} v^2 (\Delta m) \approx \frac{1}{2} v^2(L/c^2) \rightarrow c^2 \Delta m \approx L \rightarrow \Delta m c^2 \approx \Delta W \quad (4-6)$$

A-2 Démonstration moderne

A partir de la définition générale de l'énergie en relativité générale,

$$E = -m.K_{\mu}dx^{\mu}/d\tau \quad (1)$$

Où $\mathbf{K} = (\partial_t)^{\mu}$ est le vecteur de Killing associé au temps dont les 4 composantes K^{μ} sont:

$$K^{\mu} = \{1, 0, 0, 0\}$$

Avec la métrique de la relativité restreinte (RR):

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 = -c^2dt^2 + dl^2 = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \quad (2)$$

où $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-c^2, 1, 1, 1\}$$

est le tenseur métrique de la RR et $x^{\mu} = t, x, y, z$ pour $\mu = 0, 1, 2, 3.$

A-2 Démonstration moderne

Calcul de K_μ : $K_\mu = \eta_{\mu\nu} K^\mu = \{-c^2, 0, 0, 0\}$

En reportant dans (1): $E = m.c^2 dt/d\tau \rightarrow m^2 c^4 (dt/d\tau)^2 = E^2$ (3)

Appelons \mathbf{P} le vecteur 4-impulsion et \mathbf{p} sa partie spatiale.

Le carré de sa norme est: $P^2 = P^\mu P_\mu$

où $P^\mu = mU^\mu, P_\mu = mU_\mu$

et $U^\mu U_\mu = -c^2 (dt/d\tau)^2 + (dl/d\tau)^2 = ds^2/d\tau^2 = -c^2$

Alors $P^2 = -m^2 c^2 = -m^2 c^2 (dt/d\tau)^2 + m^2 (dl/d\tau)^2$

En utilisant la définition de E de l'équation (3), on obtient:

$$-m^2 c^2 = -E^2/c^2 + \mathbf{p}^2$$

En multipliant par c^2 , il vient: $m^2 c^4 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2$

CQFD

A-3: Opérateur associée à une grandeur physique

- **Extrait du cours de mécanique quantique 2019**
- Une manière moderne de dériver l'équation de Schrödinger est de partir du hamiltonien $H(x_j, p_j)$, qui est l'opérateur associé à l'énergie totale de la particule (énergie potentielle + énergie cinétique). Il vaut :

$$H(x_j, p_j) = E = \frac{p^2}{2m} + U(x, y, z, t)$$

- L'équation de propagation de l'onde $\psi(x, y, z, t)$ associée s'obtient en associant des opérateurs agissant sur la fonction d'onde à savoir :
- A- L'opérateur « multiplication noté x » par ψ pour les coordonnées de position x_j .
- B- L'opérateur $-i\hbar/\partial_j\psi$ pour les quantités de mouvement p_j .
- C- L'opérateur $i\hbar/\partial_t\psi$ pour l'énergie E

- Remarquons les deux concepts:
 - Une fonction d'onde, qui contient l'information « générale » sur le système,
 - Des opérateurs associés aux grandeurs mesurables par l'expérimentateur, qui vont caractériser l'intervention humaine, montrant l'interdépendance entre le monde physique et l'esprit du physicien!

$$H(x_j, p_j) = E = \frac{p^2}{2m} + U(x, y, z, t)$$

- En réalisant les opérations A, B, C définies précédemment, on obtient :

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = U\psi - \frac{h^2}{2m} \Delta \psi$$

- Qui est l'équation de Schrödinger. Ce procédé a l'avantage de montrer comment les opérateurs sont associés à la fonction d'onde.

A-4 Fondement de $P = \gamma m v$

La relativité générale est une théorie de l'espace-temps. A ce titre les seuls paramètres qui ont un sens physique sont spatio-temporels. Dans la métrique de Minkowski en coordonnées cartésiennes:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2(-c^2 + dx^2/dt^2 + dy^2/dt^2 + dz^2/dt^2)$$
$$-c^2 d\tau^2 = dt^2(-c^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = dt^2(-c^2 + v^2) \rightarrow dt^2/d\tau^2 = c^2/(c^2 - v^2) \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Où v est la vitesse newtonienne de composantes v_x, v_y, v_z .

Le 4-vecteur spatio-temporel **impulsion** relativiste est: $\mathbf{P} = m \mathbf{U}$.

En coordonnées cartésiennes, cela s'écrit (μ de 0 à 3): $P^\mu = m U^\mu$

$$U^\mu = \left\{ c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right\} \rightarrow P^\mu = m U^\mu = m \frac{dt}{d\tau} \left\{ c \frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} \rightarrow P^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m \{c, v_x, v_y, v_z\}.$$

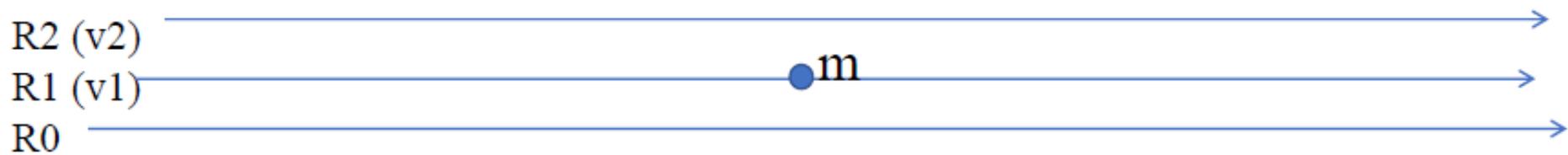
Le facteur de Lorentz, représentant la distorsion temporelle, s'introduit ainsi dans la composante spatiale de l'impulsion, image de la quantité de mouvement newtonienne.

A-4 Vérification de $P = \gamma m v$

Une manière simple de vérifier cette formule est d'utiliser la loi de composition de vitesses u, v établie par Einstein dans son article fondamental de 1905.

$$w = \frac{(u+v)}{1+\frac{uv}{c^2}} \quad (1)$$

Pour cela on considère 3 référentiels galiléens R_0, R_1, R_2



R_1 a une vitesse relative v_1 par rapport à R_0 et R_2 a une vitesse relative v_2 par rapport à R_0 . En conséquence R_1 a une vitesse relative $v_3 = -v_2 + v_1$ par rapport à R_2 en mécanique newtonienne.

En mécanique newtonienne, pour la masse m dans R_1 , on a $P_1 = m v_1$ par rapport à R_0 et $P_3 = m v_3 = m (v_1 - v_2)$ par rapport à R_2 . C'est bien la même forme $P_i = m v_i$ dans les 2 cas.

A-4 Vérification de $P = \gamma m v$

En relativité nous devons utiliser la loi de composition relativiste de vitesses (1) pour obtenir la vitesse relative v de R_1 par rapport à R_2 .

Avec la relation newtonienne nous aurions:

$$P_1 = m v_1 \text{ par rapport à } R_0,$$

$$P_3 = m v = m \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \text{ par rapport à } R_2, \text{ au lieu de } P_3 = m v_3 = m (v_1 - v_2)$$

Cela ne convient pas: La forme de la relation dépend du référentiel.

Essayons $P = \gamma_i m v_i$, cela va donner :

$$P_1 = \gamma_1 m v_1, \text{ par rapport à } R_0,$$

$$P_3 = \gamma_v m v = \gamma_v m \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \text{ par rapport à } R_2: \text{ Développons et simplifions.}$$

$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_1 - v_2)^2}{c^2}}} \frac{m(v_1 - v_2)}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{m(v_1 - v_2)}{\sqrt{1 - \frac{(v_1 - v_2)^2}{c^2}}} = \frac{m v_3}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} = \gamma_3 m v_3 \text{ où } \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}}$$

Ceci est bien de la forme: $P_3 = \gamma_3 m v_3$ avec $v_3 = v_1 - v_2$, *CQFD*

Références

- 1- **Bizouard C.** www.annales.org/archives/x/poincaBizouard.pdf (SYRTE)
- 2- **Einstein A.** (1905) Sur l'électrodynamique des corps en mouvement. Annalen der Physik, vol XVII, p891-921
- 3- **Einstein A.** (1905) L'inertie d'un corps dépend elle de son contenu en énergie. Annalen der Physik, vol XVII, p 639-641.
- 4- **Albert Einstein:** Œuvres choisies (traduits de l'allemand). Source du savoir – Seuil- CNRS- tome 2, p. 59-62, textes choisis et présentés par: Françoise Balibar, Olivier Darrigol, Bruno Jech et John Stachel.
- 5- **Einstein A.**(1993), « Traduction oeuvres choisies 2, Relativité I» Sources du savoir, Seuil CNRS (1993) p 60-62
- 6- **Gourgoulhon E.** (2006), « cours de Relativité générale », p 32, IAP Paris.
- 7- **Ives H.** (1952) « Derivation of the mass energy relation », J.Opt.Soc.Americ.42,8,540-543
- 8- **Jammer** (1961) Concept of mass in modern physics, Harvard University press,
- 9- **Maxwell J.C** (1891) « A Treatise on Electricity and Magnetism », Oxford,Clarendon Press,3^e.ed. 1891 § 792.
- 10- **Poincaré H.** (1905) « Compte Rendus de l'Académie des Sciences », 140, p1504-1508.