Extraits du document « modern-relativity » par David Waite :
http://www.modernrelativitysite.com

Traduction des chapitres 3,5 et 11 (partiellement) par J. Fric qui endosse toute la responsabilité des erreurs que sa traduction aurait pu introduire. En cas de doute reportez vous à l'original.

3-Implications dynamiques en RR

Dans de nombreux textes la définition de la masse n'échappe pas à l'auto référencement. Certains textes posent comme prémisse un quadri vecteur impulsion énergie de la forme $p^\mu = mU^\mu$ qui n'est pas utilisable pour les particules de masse nulle et ensuite définissent la masse comme la contraction de ce vecteur ou vice versa. Afin d'éviter l'auto référencement et pour inclure les particules de masse nulle et aussi pour faciliter le passage en douceur vers la mécanique quantique relativiste, nous allons tenter une nouvelle, bien que non unique, approche .

Par exemple nous distinguerons deux quadrivecteurs impulsion notés par l'utilisation de minuscules / majuscules, p^μ, et P^μ.

Celui en minuscule sera le quadrivecteur de la première espèce et celui en majuscule celui de deuxième espèce. Nous ferons cela en partie parce que la masse d'une particule sera définie comme la contraction du quadrivecteur de la première espèce qui est le quadri vecteur énergie impulsion utilisé dans les textes relativistes classiques (non quantique relativistes).

Le quadrivecteur énergie impulsion de seconde espèce est défini ici, principalement parce que ses éléments sont ceux qui vont correspondre aux opérateurs quantiques en mécanique quantique relativiste (d'autres auteurs utilisent des conventions différentes pour les majuscules).

De l'expérience ou de la mécanique quantique, nous savons qu'à l'amplitude de l'impulsion tridimensionnelle d'une particule, on fait correspondre une longueur d'onde (que la particule ait une masse ou non)[1].

$$p = h/\lambda$$

(3.1.1a)

Et la relation entre la quantité de mouvement ***p*** tridimensionnelle et le 3-vecteur ***k*** (**que la particule ait ou non une masse**) est :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

(3.1.1b)

(Nota : pour des raisons typographiques, il n'est pas simple de mettre une flèche sur les lettres, les vecteurs sont notés en caractères gras)

Un quatrième élément correspondant à la coordonnée temporelle est aussi lié à une fréquence (**que la particule ait ou non une masse**), cet élément multiplié par *c* va nous fournir l'énergie relativiste E_R.

$$p^0 = \frac{\hbar\omega}{c}$$

(3.1.2a)

$$E_R = p^0 c$$

(3.1.2b)

Où ω est lié à la longueur d'onde par :

$$\omega = 2\pi c/\beta\lambda$$ [2]

(3.1.2c)

Et de $\beta c = d\omega/dk$:[3]

$$\omega^2 = c^2k^2 + \text{constant}$$

---

[1] Voir établissement de l'équation de Schrödinger.

[2] Rappel : $\beta = v/c$ où nous posons $v = v_g$ (vitesse de groupe). Cette définition est valable que la particule ait une masse ou non en posant $v_g = v$, vitesse de la particule massive.

[3] En électromagnétique « classique) $d\omega/dk = v_g$ (vitesse de groupe), $\omega/k = v_\varphi$ (vitesse de phase).

(3.1.2d)

La constante d'intégration se révèle être proportionnelle au carré de la masse.

Comme première prémisse, nous poserons que cette définition des quatre composantes de l'impulsion définit un quadri vecteur que nous appellerons quadri vecteur de la première espèce p^μ.

Ensuite considérons l'introduction d'un quadri vecteur potentiel ϕ^μ qui va solliciter une réponse d'une particule de test de charge q. Peu importe si cette charge est électrique ou non, la seule contrainte est qu'elle obéisse à un quadri potentiel. Nous définissons le quadri vecteur impulsion de seconde espèce par :

$$P^\mu = p^\mu + (q/c)\phi^\mu$$

(3.1.3a)

et nous appellerons sa composante temporelle P_0 , l'énergie totale E

$$E = P_0 c$$

Les textes de physique qui ne font pas la distinction entre les deux types, lorsque le potentiel n'est pas nul, laissent à penser (à tort) que l'énergie totale E est p^0/c alors qu'elle est en réalité P_0/c à savoir, $E_R + q\phi$ en RR. De même, on laisse à penser que l'impulsion relativiste est p^i. De ceci on déduirait que l'énergie E, lorsqu'il y a un potentiel, est comme quelque chose auquel on pourrait additionner une constante arbitraire, contrairement à l'impulsion. Cela donne l'illusion de tracer une distinction entre le temps et l'espace, l'énergie étant la composante temporelle et la tri-impulsion les composantes spatiales. Mais, ici, où nous avons fait la distinction entre les quadri impulsions, on voit que cette distinction, entre temps et espace, n'existe pas. Ceci, car c'est dans P^μ que cette constante arbitraire peut être ajoutée au potentiel, et c'est aussi dans ce quadri vecteur que de telles constantes arbitraires peuvent être ajoutées aux composantes spatiales du quadri vecteur potentiel. On peut faire cela, car ce qu'on demande, c'est qu'elles se transforment comme le font les coordonnées, comme un quadri vecteur.

Compte tenu de ces relations la définition relativiste pour la masse d'une particule est : [4]

$$m^2c^2 = |\eta^{\mu\nu}[P_\mu - (q/c)\phi_\mu][P_\nu - (q/c)\phi_\nu]|$$

(3.1.4a)

Soit

$$m = [(E_R/c^2)^2 - (p/c)^2]^{1/2} = E_0/c^2$$

(3.1.4b)

Qu'on peut aussi exprimer ainsi:

[4] Notons que c'est le Hamiltonien de la particule en RR.

$$m^2c^2 = |\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}|$$

(3.1.4c)

Dans la seconde équation nous avons introduit E_0, l'énergie relativiste évaluée au repos, $E_0 = E_R|_{v=0}$. Les signes de valeur absolue, ont été utilisés pour s'affranchir des conventions de signe pour la signature de la métrique.

Bien que toutes les équations 3.1.4 soient équivalentes étant donné les relations ci dessus, la définition en termes de quadri vecteur de la deuxième espèce (équation 3.1.4a) est préférable dans les discussions de mécanique quantique, car c'est elle qui est au cœur du formalisme relativiste de la mécanique quantique relativiste. Par exemple quand on remplace les éléments du quadri vecteur impulsion de seconde espèce par les opérateurs d'énergie et d'impulsion de la mécanique quantique, et qu'on les fait agir sur la fonction d'onde cela donne l'équation de Klein-Gordon en incluant un vecteur potentiel non nul

$$\eta^{\mu\nu}[P_{op\mu} - (q/c)\phi_{\mu}][P_{op\nu} - (q/c)\phi_{\nu}]\Psi = m^2c^2\Psi$$

(3.1.5a)

qui peut aussi être écrit

$$[(H - \phi)^2 - (\mathbf{P_{op}}c - q\boldsymbol{\phi})^2]\Psi = m^2c^4\Psi$$

(3.1.5b)

Où $H = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ et $\vec{P}_{op} = -i\hbar\vec{\nabla}$

La définition 3.1.4b de la masse,*en tant qu'énergie au repos* $m = E_0/c^2$, $E_0 = E_R|_{v=0}$. ou en tant *qu'énergie relativiste de la quadri impulsion dans le référentiel associé au "centre d'impulsion"* $m = E_{cm}/c^2$, $E_{cm} = p^0{}_{cm}c|_{vcm=0}$, dans le cas d'un système de particules est la définition que nous utiliserons, par défaut, dans le reste du document sur la RR, lorsque nous nous référerons à m, sans commentaires particulier. C'est le m qu'on trouve dans la version relativiste de la seconde loi de Newton

$$F^{\lambda} = mA^{\lambda}$$

(La quadri force est égale à la quadri accélération multipliée par m, voir (3.2.3))

Cette masse est un invariant. Elle ne change **pas** avec la vitesse. Les équations 3.1.4 sont appelées la condition de couche de masse, car elles sont isomorphes à l'équation d'une couche (coquille) sphérique. De cette définition, il s'ensuit que les photons ont une masse nulle. En mécanique quantique, les particules virtuelles n'ont pas en général la valeur escomptée d'énergie pour une impulsion donnée. On dit souvent qu'elles sont hors de leur couche de masse. Les coordonnées de vitesse d'une particule sont données simplement par :

$$u^\mu = dx^\mu/dt$$

(3.1.6)

Le quadri vecteur vitesse ou vitesse propre s'écrit:

$$U^\mu = dx^\mu/d\tau$$

(3.1.7)

Où τ est le temps propre, ce qui est la coordonné temps dans le référentiel associé à la particule. Les deux sont liés par la dilatation temporelle

$$U^\mu = \gamma u^\mu$$

(3.1.8)

Considérons l'expression suivante

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = [(mU^0)^2 - (mU^1)^2 - (mU^2)^2 - (mU^3)^2]$$

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = m^2[(dct/d\tau)^2 - (dx/d\tau)^2 - (dy/d\tau)^2 - (dz/d\tau)^2]$$

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = m^2(dt/d\tau)^2[c^2 - (dx/dt)^2 - (dy/dt)^2 - (dz/dt)^2]$$

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = m^2\gamma^2 c^2(1 - v^2/c^2)$$

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = m^2c^2\gamma^2\gamma^{-2}$$

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = m^2c^2$$

Ensuite référons nous à la définition de la masse 3.1.4c, on arrive à:

$$\eta_{\mu\nu} mU^\mu mU^\nu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$$

De tout ceci, on tire la relation entre le quadri vecteur vitesse et le quadri vecteur impulsion de première espèce.

$$p^\mu = mU^\mu$$

(3.1.9)

L'équation 3.1.8 nous révèle la relation entre la quadri impulsion et la vitesse de coordonnée pour des particules massives

$$p^\mu = \gamma.mu^\mu$$

(3.1.10a)

soit en prenant la relation valable pour les particules avec ou sans masse

$$p^{\mu} = (E_R/c)(u^{\mu}/c)$$

(3.1.10b)

Le terme γ est phusiquement associé au terme de vitesse par la dilatation temporelle. Dans le passé, quelques physiciens qui n'ont pas suivi Einstein, mais Planck, Lewis, et Tolman, n'ont pas associé correctement le terme γ avec la masse, définissant ainsi un nouveau type de masse.

$$M = \gamma m \leftarrow mauvais$$

(3.1.11)

Cette masse *M* est improprement appelée " masse relativiste". En l'absence d'un potentiel, la composante zéro du quadrivecteur impulsion est définie comme l'énergie divisée par *c*, ce qui donne alors :

$$p^0 = Mu^0$$

$$E/c = Mc$$

$$M = E/c^2 \leftarrow Mauvais$$

(3.1.12)

Bien que plus compliqué, à terme, l'aspect mathématique est cohérent et conduit à des prédictions cohérentes avec les observations et on peut faire valoir que c'est physiquement correct. En vertu du rasoir Occam, nous devons cependant abandonner cette définition et cette méthode. Le *m* de cette méthode est appelé à tort "masse au repos". C'est erroné pour la raison suivante. Appeler m masse au repos, c'est implicitement supposer que m n'est pas la masse dans les autres référentiels qui ne sont pas au repos. Nous avons déjà remarqué que m est un invariant car il a la même valeur lorsqu'on le calcule dans tous les référentiels. Ce n'est pas seulement la valeur pour le référentiel repos. La méthode de la masse relativiste conduit aussi à beaucoup de conclusions erronées. Par cette méthode, la lumière a une masse au repos nulle. Nous avons indiqué dans un exemple parmi d'autres que comme la lumière n'est au repos dans aucun référentiel la question de savoir si la lumière a une masse n'a pas de réponse. La contraction de la quadri impulsion du photon donne zéro, dans tous les référentiels et pas seulement dans un hypothétique référentiel repos. En bref, oublions la « masse relativiste » et la « masse au repos », la masse m qui est vraiment observée est un invariant. Elle ne varie pas avec la vitesse. De plus, de cela, on peut correctement physiquement définir qu'un photon, ou de tout ce qui voyage à la vitesse c invariante par transformation de Lorentz de la lumière, a une masse égale à zéro.

Nous avons

$$p^0 = E_R/c.$$

Nous avons aussi démontré la relation entre la quadri impulsion et la quadri vitesse (3.1.9) qui s'écrivait

$$p^0 = mU^0.$$

En mettant tout cela ensemble

$$E_R/c = mU^0$$

$$E_R/c = m(dct/d\tau)$$

$$E_R = (dt/d\tau)mc^2$$

$$E_R = \gamma mc^2 \leftarrow Bon$$

(3.1.13)

Ceci est la relation masse- énergie relativiste pour une particule massive. Maintenant cette énergie ne tend pas vers zéro lorsque la vitesse v tend vers zéro, nous voyons donc qu'une particule massive a bien une énergie lorsqu'elle est au repos. Ceci nous indique que la masse est équivalente à l'énergie au repos, l'énergie relativiste à vitesse zéro.

$$E_0 = E_R|_{v=0} = mc^2 \leftarrow Bon$$

(3.1.14)

L'énergie cinétique d'une particule est la quantité d'énergie associée à son mouvement. Donc :

$$E_K = E_R - E_0$$

(3.1.15a)

Ceci donne

$$E_K = (\gamma - 1)mc^2$$

(3.1.15b)

Le tenseur énergie impulsion est un tenseur qui contient les informations sur la densité d'énergie, l'impulsion, les contraintes, etc., contenus dans l'espace. Le tenseur énergie de masse seulement vaut (5.1.4)

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$$

La composante T^{00} vaut:

$$T^{00} = (dt/d\tau)^2 \rho_0 c^2$$

ρ_0 est la densité de masse dans le référentiel associé (se déplaçant avec) ce morceau de masse, mais à cause de la contraction de longueur de Lorentz de la RR de la masse locale, la masse de coordonnée dans un référentiel est alors :

$\rho = (dt/d\tau)\rho_0$

Alors ceci devient

$$T^{00} = (dt/d\tau)\rho c^2$$

Mais c'est précisemment la densité d'énergie de coordonnée dans le référentiel. La définition générale relativiste cohérente la plus simple de la densité d'énergie de coordonnée est alors/

$$\textit{Densité d'énergie de coordonnée (référentiel)} \equiv T^{00} \tag{6.3.6}$$

Pour des tenseurs énergie impulsion plus généraux, on définit en général ρ_0 par

$$\rho_0 = T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu / c^4 \tag{3.1.16}$$

Si ρ_0 est positif, alors $T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu$ l'est aussi. Dans le cas contraire on a une violation de la condition d'énergie faible. Plus généralement la condition d'énergie faible est :

$$T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0 \tag{3.1.17}$$

pout tout vecteur V_μ de type temps. La matière ne peut violer cette condition que dans le cadre de l'inégalité de Pfenning, voir :

http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9805037

Les autres éléments ont d'autres interprétations. Par exemple T^{ii} est un flux d'impulsion par surface dans la direction x^i, une pression sur un plan normal à la direction x^i. T^{ij} est la composante x^i de l'impulsion dans la direction x^j, il décrit un cisaillement de l'impulsion. T^{0i} est la densité volumique de la $i^{ième}$ composante du flux d'impulsion.

Maintenant nous allons examiner le concept de masse système. Nous avons vu que pour une particule la masse est équivalente à l'énergie au repos (3.1.14)

$$E_0 = mc^2.$$

Pour un système de particules le meilleur concept pour la masse système m est défini comme l'énergie E_{cm} dans le référentiel du centre des moments (cm)

$$E_{cm} = mc^2.$$

(3.1.18)

La masse système se révèle ne pas être égale à la somme des masses m_{tot} de ses constituants. En fait, c'est la somme de toutes les énergies des constituants, dans le référentiel du centre des moments.

Considérons pour un moment un invariant de Lorenz invariant pour le système, cohérent avec la condition de couche de masse.

Commençons par définir

$$p_{sys}' = [E_{cm}/c\ ,\ 0,\ 0,\ 0]$$

(3.1.19)

comme quadrivecteur pour le centre d'inertie du référentiel du moment. Ensuite définissons P_{sys} comme la transformée de Lorentz de ceci pour tous les référentiels qui nous intéressent.

$$p_{sys} = \Lambda p_{sys}'$$

(3.1.20)

Du fait de la simultanéité relative p_{sys} comme défini ici n'est *pas toujours égal* à la somme "simultanée" des quadri moments des constituants, quand il y a des forces externes qui s'exercent en différents points du système. La masse système est définie comme l'invariant suivant:

$$m^2c^2 = \eta_{\mu\nu} p_{sys}{}^{\mu} p_{sys}{}^{\nu}$$

(3.1.21)

pour le scénario décrit ci dessus,

$$m = [(E_{Rsys}/c^2)^2 - (p_{sys}/c)^2]^{1/2} = E_{cm}/c^2$$

(3.1.22a)

En considérant la composante temporelle de l'équation 3.1.21 on retrouve la relation

$$E_{Rsys} = \gamma_{cm} mc^2$$

(3.1.22b)

Prouvons que cette définition du quadri moment du système est identique à la somme des quadri moments des constituants du système. Commençons par la somme des quadri moments dans un référentiel arbitraire.

$$p_{sys} = \Sigma_i\, p_i$$

Faisons une transformation de Lorentz vers un autre référentiel

$$\Lambda p_{sys} = \Lambda \Sigma_i \, p_i$$

Inversons l'ordre des symboles de la somme et de la transformation (opérations linéaires)

$$\Lambda p_{sys} = \Sigma_i \, \Lambda p_i$$

La transformée de Lorentz de chaque quadri moment est le quadri moment dans le nouveau référentiel

$$\Lambda p_{sys} = \Sigma_i \, p_i'$$

Mais le membre de droite est le quadri moment net dans le nouveau référentiel.

$$\Lambda p_{sys} = p_{sys}'$$

Ceci prouve que le quadri moment net du système est en fait un quadri vecteur lui-même et cela donne :

$$E_{Rsys} = \gamma_{cm} m c^2$$

Où m est la masse du système et est l'énergie dans le référentiel du centre des moments.

$$\boldsymbol{p} = \gamma_{cm} m \boldsymbol{u}_{cm}$$

(3.1.22c)

et

$$m^2c^2 = \eta_{\mu\nu} p_{sys}^{\mu} p_{sys}^{\nu} = E_{Rsys}^2/c^2 - p_{sys}^2 = E_{cm}^2/c^2$$

La raison pour laquelle la masse de 3.1.21/3.1.22a n'est pas la même que le "*total*" de ses masses le constituant , m_{tot} , est que la somme des masses des constituants n'est pas toujours égale à l'énergie dans le référentiel du centre masse. Par exemple un système de particules de masses nulles ont une condition de couche de masse nulle quand elles vont toutes se déplacer dans la même direction tandis que le système va avoir une condition de couche de masse non nulle, quand elles se déplacent dans des directions différentes. Un avantage que de la définition de l'énergie dans le référentiel du centre des moments a sur la masse totale est que par définition, non seulement la masse est un invariant, mais la masse du système est aussi conservée. Notons que le concept de masse captive est équivalent à l'énergie m dans le référentiel du centre de masse et non pas au total des masses m_{tot}.

Pour accroître la masse m du système on doit accroître l'énergie totale E_{cm}, dans le référentiel du centre de masse, de la même valeur. Ceci montre que la masse définie par m est conservée de la même manière que l'énergie. Si on transfère de l'énergie depuis de la matière externe pour changer l'énergie dans le référentiel du centre des moments d'un objet, cela va accroître sa masse système individuelle, mais si on étend le système de façon à inclure la matière dont on vient de transférer l'énergie, on va se rendre compte que l'énergie dans le référentiel du centre des moments, c.a.d la masse m du système étendu, est en définitive conservée.

Une somme d'invariants est aussi un invariant et on peut également écrire le total des masses m_{tot} comme une somme de ses constituants. Pour un système de n particules cela donne

$$m_{tot} = (\eta_{\mu\nu}p_1^{\mu}p_1^{\nu})^{1/2} + (\eta_{\mu\nu}p_2^{\mu}p_2^{\nu})^{1/2} + ... + (\eta_{\mu\nu}p_n^{\mu}p_n^{\nu})^{1/2}$$

(3.1.23)

soit

$$m_{tot} = m_1 + m_2 + ... + m_n$$

(3.1.24)

L'indice indique le numéro de la particule. De nouveau le problème majeur quand on s'attaque à la masse d'un système c'est que le total des masses n'est pas conservé. Cette difficulté vient du fait qu'on considère naturellement la masse comme résultant elle-même d'une somme. En particulier quand on se réfère à la « conversion masse en énergie cinétique ». Considérons par exemple une particule massive qui se désintègre en deux photons (de masse nulle). Comme l'énergie du système, qui est la masse du système, est conservée, la masse du système ne change pas du fait de la désintégration. Ce qui change c'est que l'énergie était initialement constituée par de l'énergie au repos, l'énergie au repos de la particule, qui s'est transformée en énergie de mouvement celle des photons. A la lumière de ceci, on ne devrait pas parler de conversion masse énergie. L'énergie et la masse du système sont conservés. On devrait plutôt dire que l'énergie associée aux particules au repos a été transférée en mouvement aux particules de l'état final. Un changement dans la somme de masses peut produire un changement d'énergie cinétique des masses restantes, mais la masse d'un système fermé ne change pas plus qu'elle se convertit en quelque chose.

Quelquefois, à la place, il est utile de définir une densité de masse. De même qu'il y a deux manières de décrire la masse d'un système m et m_{tot}, Il y a deux manières importantes de décrire une densité de masse invariante. La première est le ρ_0 dans l'équation qui sera donnée ultérieurement (5.1.4)

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^{\mu} U^{\nu}$$

Cette définition est celle qui correspond au plus près à la description ci dessus de la masse m d'un système. Il donne la relation entre le tenseur énergie impulsion de la matière composée de constituants non couplés à la quadri vitesse d'un fluide sans pression en chaque point.

L'énergie totale du système est conservée et peut être définie par l'intégrale de volume suivante :

$$E_{sys} = \int\int\int T^{00} dxdydz$$

(3.1.25a)

Par exemple le tenseur énergie impulsion 5.1.4 devient

$$E_{sys} = \int\int\int \gamma_{fluid}^{2} \rho_0 c^2 \; dxdydz$$

(3.1.25b)

On peut aussi définir l'impulsion du système par l'intégrale suivante

$$\boldsymbol{p}_{sys} = \iiint (T^{0i}\,\boldsymbol{e}_i/c)\; dxdydz$$

(3.1.26a)

Pour l'exemple du tenseur énergie impulsion 5.1.4 ceci donnerait

$$\boldsymbol{p}_{sys} = \iiint (\gamma_{fluid}{}^2 \rho_0 u^i \boldsymbol{e}_i) dxdydz$$

(3.1.26b)

$\boldsymbol{e}_i$ est un vecteur unitaire dans la direction de la $i^{ième}$ composante de l'impulsion.

On peut alors toujours définir la masse du système comme l'énergie dans le référentiel du centre des moments. C'est l'énergie dans le référentiel où :

$$\boldsymbol{p}_{sys} = \boldsymbol{0}.$$

Alors, nous avons toujours

$$E_{cm} = mc^2.$$

L'autre concept de densité de masse invariante, correspondant au total des masses m_{tot} serait

$$\rho_{Tot} = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}/c^2$$

(3.1.27)

Cette sorte de densité de masse est un invariant, mais son intégrale de volume n'est pas conservée. C'est en se référant à cette sorte de masse qu'on dit, pour un champ comme le champ électromagnétique, qu'il est de masse nulle, ainsi que lorsqu'on se réfère à tout système de masse nulle. Ceci est nul pour tout système de particules sans masse.

De ces deux description le concept de masse m est de loin le plus utile.

Selon (3.1.11)

$$E_R = \gamma mc^2$$

où γ était donné par

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Remarquons que l'énergie diverge à $v = c$ pour des particules de masse non nulle. Donc, l'énergie nécessitée pour accélérer un corps massif jusqu'à la vitesse c est infinie. Les seules particules d'énergie finie qui peuvent voyager à la vitesse *c* sont celles sans masse. Dans ce cas au lieu d'une relation masse énergie nous avons une relation moment énergie (3.1.5) qui dit :

$$E = E_R = pc, \tag{3.1.28}$$

où E et p sont associés à une fréquence et une longueur d'onde.

On peut spéculer sur le cas de particules qui au lieu d'être accélérées à la vitesse c se déplaceraient plus vite que c à leur création. Une telle particule hypothétique est appelée un *tachyon*. Reamarquons que si $v > c$, alors γ est imaginaire. Comme l'énergie imaginaire ne semble pas avoir de sens physique, nous supposons que la masse doit être aussi imaginaire pour que l'énergie (et le moment) soient réels.

Le problème principal lié à l'existence de telles particules est qu'elles peuvent être utilisées pour violer le *principe de causalité*. Le principe de causalité stipule que l'effet ne précède jamais la cause. Supposons un tachyon émetteur et un tachyon récepteur en différents points sur l'axe x d'un référentiel S. Disons que le signal voyage à une vitesse arbitrairement grande, de sorte que les évènements d'émission et de réception sont virtuellement simultanés. Rappelons nous que des évènements simultanés dans un référentiel, ne le sont pas dans d'autres. On peut donc trouver un référentiel où la réception précède la cause, d'où la violation de causalité (notons que peut calculer l'intervalle d'espace temps et vérifier qu'il est de type espace)

Pire, ceci conduit au type de paradoxe du grand père, on peut voyager dans le passé et tuer son grand père avant que notre propre père soit né (en fait conçu) avec ce que cela implique.

On dit quelquefois que la RR impose que rien ne peut aller plus vite que la lumière. En fait, tant que la physique que nous décrivons obéit à la RR, et que nous voulons préserver la causalité, ce que cela implique vraiment, c'est que l'information ne peut pas voyager plus vite que la lumière. Dans le même cadre, aucune particule massive ne peut atteindre la vitesse c.

Certains physiciens ont réalisé des expériences où ils ont prétendu avoir transmis de l'information plus vite que la lumière à l'aide d'ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu dispersif.

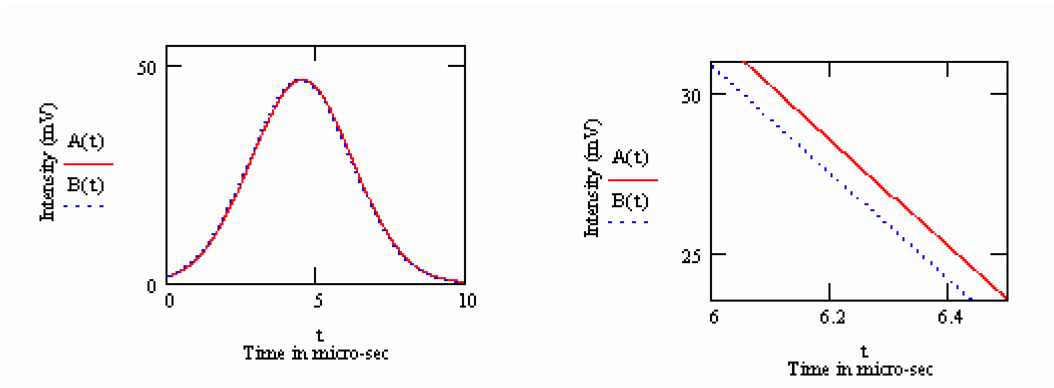
En particulier, la controverse concerne la transmission à **gain assisté** plus rapide que la vitesse de groupe « *c* » démontrée dans des milieux dispersifs anormaux.

http://www.iitk.ac.in/infocell/Archive/dirjuly3/science_light.html

Si effectivement, comme ils le revendiquent, "l'information" a été vraiment transmise a une vitesse supérieure à c, alors la RR implique qu'on peut trouver un référentiel où la réception du signal à un bout précède l'émission du signal à l'autre bout. Ce serait un cas flagrant de violation de causalité qui nous amènerait à réviser nos positions sur l'(im)possibilité du paradoxe du grand père. Cependant rien n'exclut que de telles violations soient possibles, tout en en interdisant d'autres comme celle du grand père. Une analyse en profondeur de l'expérience peut nous en convaincre (..)

L'explication qui suit montre pourquoi ce type d'expérience n'est pas complètement convaincante vis-à-vis de la possibilité de transmettre de l'information a une vitesse supérieure à *c*.

Par exemple dans un milieu de *6* cm d'épaisseur, on transmet une impulsion laser qui franchit la distance à une vitesse de *310 c*. C'est une vitesse de groupe, pas une vitesse de phase. La figure ci-dessous est une représentation des données reçues pour les deux impulsions. La courbe pointillée en bleu représente l'intensité reçue en fonction du temps de l'impulsion de vitesse *310 c* et la courbe en rouge représente l'intensité en fonction du temps pour une impulsion de vitesse c envoyée au même moment que l'autre.



Figures 3.1.1a,b

Sur l'agrandissement du second graphique, la différence horizontale montre que l'impulsion *310c* arrive *62ns* plus tôt que l'impulsion *c*. Cette expérience est elle un exemple de violation de causalité ? Y a-t-il transfert d'information plus vite que « *c* » ?

Sur des transmissions longues on considère que la vitesse de transmission de l'information est la vitesse de groupe c'est-à-dire la vitesse de l'énergie contenue dans l'impulsion. Il est bien connu que les vitesses de phase peuvent souvent être supérieures à « *c* », ce qui explique que les transmissions dans les guides d'ondes usuels se fasse à des vitesses de groupe inférieures à « *c* ».

Le fait que la vitesse de groupe soit supérieure à « *c* » dans cette expérience n'est pas convaincante que le transfert d'information se passe à une vitesse supérieure à "*c*", du fait que la vitesse de groupe ne peut pas être assimilée à la vitesse de transfert de l'information, et ceci pour la raison suivante.

Remarquons que les *62ns* de différence de temps entre les deux impulsions est bien inférieure au temps de réception de l'impulsion complète. Le temps entre l'entrée dans le milieu du début de l'impulsion et la fin de réception est égal à la somme du temps de transfert et du temps de « lecture » de l'impulsion. La largeur totale à mi hauteur FWHM de l'impulsion est d'environ $4.0\mu s$. Prenons cela comme temps de lecture. Le temps de transfert de groupe vaut $6.0cm/310c = 0.65ps$. Prenons le temps de transfert de l'information égal à la somme des deux, soit environ $4.0\mu s$, on trouve que la vitesse d'information était : $6.0cm/4.0\mu s = 5.0x10^{-5}c$, une minuscule fraction de la vitesse de la lumière.

Il y a deux manières de modifier cette expérience pour démontrer clairement qu'on peut transporter de l'information à une vitesse supérieure à "*c*".

D'abord, on peut allonger le parcours dans le milieu de manière à rendre le temps de lecture liée à la largeur de l'impulsion négligeable.Ce qui rend la tâche impossible, c'est la nature dispersive du milieu lui-même, même avec le gain assisté, il va y avoir un compromis à faire entre la dégradation du signal et la longueur à parcourir dans le milieu. Il pourrait y avoir une limite qui ferait qu'une ligne de transmission suffisamment longue pour que la transmission de l'information soit supérieure à « c » ferait que le signal serait perdu.

L'autre manière consiste à raccourcir l'impulsion, de manière à rendre négligeable le temps de lecture. De nouveau, c'est le bide ! Plus l'impulsion est brève, plus son spectre est large (cf Fourier) et comme il n'y a qu'une bande de fréquence très étroite où la transmission supra luminique marche, l'impulsion va être complètement distordue et élargie par le milieu dispersif.

En conclusion de tout cela, en dépit de quelques tentatives méritoires (mais plutôt tordues, quand même !) pour prouver le contraire, il semble que le respect de la causalité en RR ait encore quelques beaux jours devant lui.

Exercices

Problème 3.1.1

Considérons des ondes planes monochromatiques de lumière d'une longueur d'onde de *500nm*. Quelle est la fréquence associée?

Problème 3.1.2

a. Quelle est l'énergie cinétique d'un homme de *75 kg* voyageant à une vitesse de *(4/5)c* ?

b. Bien que la masse système, c.a.d l'énergie dans le référentiel associé au centre des moments est conservé dans une réaction isolée, la somme des masses ne l'est pas. La somme des énergies cinétiques des constituants d'un système après une interaction est la somme des énergies cinétiques avant plus la différence de la somme des masses qu'a perdu le système au cours de l'interaction. La variation de l'énergie de liaison des particules en interaction est typiquement comptée dans la somme des masses. Par exemple un atome d'hydrogène dans un système est moins massif que dans son état plancher. Alors, on dit quelquefois que c'est une réaction de conversion de masse en énergie cinétique. Quelle quantité de la somme des masses d'un système doit on annihiler pour produire une énergie cinétique égale à celle de notre homme dans la partie a ? (Une bombe atomique « convertit » environ la masse d'une pièce de monnaie en énergie cinétique en explosant)

Problème 3.1.3

Montrer que si la vitesse d'un objet est $v = c(1 - \varepsilon)$ où ε est très petit, ε vaut approximativement

$$E \approx \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$$

Problème 3.1.4

(adapté de Misner, Thorne, et Wheeler's Gravitation problème 5.4)

Considérons un systeme avec v << c.

a. Utiliser les propriétés de transformation de Lorentz d'un tenseur pour montrer :

$$T^{0i} = \Sigma_k i^{ik} \rho_0 u^k c$$

Où i^{ik} est défini par

$$i^{ik} \rho_0 c^2 = T'^{00} \delta^{ik} + T'^{ik}$$

Note: - ρ_0 est défini dans l'équation 3.1.16 pour les tenseurs énergie impulsion en général.

b. Démontrer les équations de la partie a) en utilisant des considérations Newtoniennes et la conservation de l'énergie relativiste. Suggestion :Un observateur voit l'énergie totale transportée par un volume du milieu V qui inclut et l'énergie au repos $T'^{00} V$ et le travail résultant des forces agissant sur la face du volume lorsqu'elles poussent le volume du milieu d'une certaine distance.

c. En se référant à (3.1.26 a). Considérant que la force est la variation du moment par rapport au temps, cela implique que la force par unité de volume f^i vaut

$$f^i = dT^{0i}/dct$$

Qui pour i^{ik} constant nous donne

$$f^i = \Sigma_k i^{ik} \rho_0 du^k/dt$$

Cette équation nous suggère d'appeler $\rho_0 \Sigma_k i^{ik}$ matrice de densité d'inertie. Qu'est ce que cela donne en cas de fluide parfait

d. Considérons un objet contraint, isolé, au repos et en équilibre ($T^{\mu\nu}{}_{,0} = 0$) dans le référentiel du laboratoire. Montrer que sa matrice d'inertie I^{ik} (pas le moment d'inertie), définie par:

$$I^{ik} = \iiint i^{ik} \rho_0 \, dxdydz$$

Est isotrope et résulte de la masse ou de l'énergie dans le référentiel du centre des moments du corps:

$$I'^{ik} c^2 = \delta^{ik} \iiint T'^{00} \, dx'dy'dz'$$

Problème 3.1.5

Montrer que si $v << c$

$$E_K \approx (1/2)mv^2$$

Problème 3.1.6

Quelle est la vitesse, la fréquence et la longueur d'onde d'un proton de *2Mev*?

Problème 3.1.7

D'après le problème 3.1.4 en combinant les résultats des parties c et d dans un corps isolé contraint en équilibre obéissant à la seconde loi de Newton à faible vitesse :

$$f^i = \int\int\int f^i\, dxdydz = \int\int\int (T'^{00}/c^2)\, dx'dy'dz'du^i/dt$$

qui peut aussi s'écrire par une équation entre quadri vecteurs $F = mA$. Ceci nous montre que les corps contraints isolés en équilibre vont suivre la même dynamique que la dynamique relativiste des particules individuelles et vont en conséquence obéir à :

$$E = \gamma_{cm} E_{cm}.$$

Considérons une boite contenant un gaz de photons. Les dimensions internes vont être $L, W,$ et H. L'épaisseur des parois va être δa.

Le tenseur énergie impulsion dans le référentiel propre du gaz de photon est :

$$\left[{}_{gass}T'^{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix} T'^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur énergie impulsion, dans le référentiel propre pour deux des parois dont la normale à la surface est (anti)parallèle à la direction du mouvement, exerce des contraintes sur la paroi à la fois de pression par le gaz qui pousse et d'étirement par la contrainte sur l'autre paroi qui en étant également poussée provoque une « dépression ». La composante *moyenne x-x* du tenseur énergie impulsion pour ces deux parois doit être proportionnelle à la pression du gaz sur elles, c.a.d

$$T'^{xx} = \varepsilon\, T'^{xx}/3$$

En supposant qu'ils sont fait d'une matière pour laquelle ε~1, le tenseur énergie impulsion, dans le référentiel propre cohérent avec le système isolé contraint et en équilibre pour les deux parois, va être :

$$\left[{}_{1,2}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L}{\delta a}+\dfrac{2L}{W}\right)\dfrac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{L}{\delta a}+\dfrac{2L}{H}\right)\dfrac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur énergie impulsion pour les deux parois parmi quatre dont la normale à la surface est perpendiculaire à la direction du mouvement est:

$$\left[{}_{3,4}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{W}{\delta a}+\dfrac{2W}{L}\right)\dfrac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{W}{\delta a}+\dfrac{2W}{H}\right)\dfrac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur énergie impulsion pour les deux autres parois parmi quatre dont la normale à la surface est perpendiculaire à la direction du mouvement est

$$\left[{}_{5,6}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{H}{\delta a}+\dfrac{2H}{L}\right)\dfrac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{H}{\delta a}+\dfrac{2H}{W}\right)\dfrac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Effectuer la transformation de Lorentz sur les tenseurs énergie impulsion et intégrer T^{00} sur tout le volume pour montrer:

$E = \gamma_{cm} E_{cm}$

Ne pas oublier la contraction de longueur.

++

Réponse

Soit T'^{00} la densité d'énergie du gaz dans le référentiel propre et $\rho_0 c^2$ la densité d'énergie dans le référentiel du matériau de la boîte elle même, et soit S' le référentiel propre.

Le tenseur énergie impulsion du gaz de photons dans le référentiel propre est :

$$\left[{}_{gass}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} T'^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur énergie impulsion, du référentiel propre, pour deux des parois dont la normale à la surface est (anti)parallèle à la direction du mouvement subit des contraintes antagonistes sur la paroi, à la fois de pression du gaz qui tend à la pousser et de dépression dû au fait que l'autre paroi est également poussée par la pression du gaz. La composante moyenne x-x du tenseur énergie impulsion pour ces deux parois va être proportionnelle à la pression du gaz qui s'exerce sur elles c.a.d.

$T'^{xx} = \varepsilon T'^{xx}/3$

Si on suppose que $\varepsilon \sim 1$ pour ce matériau, le tenseur énergie impulsion dans le référentiel propre, cohérent avec ceci pour ces deux parois va être :

$$\left[{}_{1,2}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{L}{\delta a}+\frac{2L}{W}\right)\frac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{L}{\delta a}+\frac{2L}{H}\right)\frac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur énergie impulsion dans le référentiel propre pour deux des parois dont la normale à la surface est perpendiculaire à la direction du mouvement est:

$$\left[{}_{3,4}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{W}{\delta a}+\frac{2W}{L}\right)\frac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{W}{\delta a}+\frac{2W}{H}\right)\frac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Le tenseur énergie impulsion dans le référentiel propre pour les deux autres parois dont la normale à la surface est perpendiculaire à la direction du mouvement est:

$$\left[{}_{5,6}T'^{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{H}{\delta a}+\frac{2H}{L}\right)\frac{T'^{00}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\left(\frac{H}{\delta a}+\frac{2H}{W}\right)\frac{T'^{00}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T'^{00}}{3} \end{bmatrix}$$

Nous dénotons *L W* et *H* les dimensions internes. L'énergie dans le référentiel du centre des moments est :

$E_{cm} = {}_{gass}E_{cm} + {}_{box}E_{cm} = LWHT'^{00} + m_{box}c^2$

La transformation de Lorentz du résultat de la boîte donne :

$${}_{gass}T^{00} = \gamma^2 T'^{00}\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right)$$

$${}_{1,2}T^{00} = \gamma^2\left(\rho_0 c^2 + \beta^2\frac{T'^{00}}{3}\right)$$

$${}_{3,4}T^{00} = \gamma^2\left(\rho_0 c^2 - \beta^2\frac{1}{4}\left(\frac{W}{\delta a}+\frac{2W}{L}\right)\frac{T'^{00}}{3}\right)$$

$${}_{5,6}T^{00} = \gamma^2\left(\rho_0 c^2 - \beta^2\frac{1}{4}\left(\frac{H}{\delta a}+\frac{2H}{L}\right)\frac{T'^{00}}{3}\right)$$

Du premier,

${}_0E = LWH\gamma T'^{00}\ (1 + \beta^2/3)$

Du second (négligeant les côtés)

${}_1E + {}_2E = 2\delta aWH\gamma(\rho_0 + T'^{00}\beta^2/3)$

Du troisième

${}_3E + {}_4E= 2\delta aLH\gamma[\rho_0 - (1/4)(W/\delta a + 2W/L)T'^{00}\beta^2/3]$

Du quatrième

${}_5E + {}_6E = 2\delta aLW\gamma[\rho_0 - (1/4)(H/\delta a + 2H/L)T'^{00}\beta^2/3]$

En additionnant les contributions on obtient:

$E = LWH\gamma T'^{00} + 2\delta aWH\gamma p_0 + 2\delta aLH\gamma p_0 + 2\delta aLW\gamma p_0$

$E = \gamma(LWHT'^{00} + m_{box}c^2)$

$E = \gamma E_{cm}$

CQFD

Fin de la réponse

++

Problème 3.1.8

Pour une particule dans un quadri potentiel ϕ^μ, la masse va être définie par l'invariant m tel que:

$m^2c^2 = g^{\mu\nu}[P_\mu - (q/c)\phi_\mu][P_\nu - (q/c)\phi_\nu]$

où q est la charge qui interagit avec ce champ.

En RR ceci donne:

$(E - q\phi)^2 = (\mathbf{P}c - q\boldsymbol{\phi})^2 + m^2c^4$

Si on devait remplacer l'énergie et l'impulsion par leurs opérateurs associés et les faire agir sur une fonction d'onde, le résultat serait des équations différentielles du second ordre. Pour obtenir des équations différentielles du premier ordre on pourrait prendre la racine carrée de l'équation si le membre de droite pouvait être exprimé par un carré parfait. Comme on le voit, on ne peut pas le faire, mais multiplions l'équation par des matrices (2x2) identités **I** de matrices (2x2) identité σ_0.

$$I = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$(E - q\phi)^2\boldsymbol{I} = (\mathbf{P}c - q\boldsymbol{\phi})^2\boldsymbol{I} + m^2c^4\boldsymbol{I}$

Maintenant nous pouvons espérer trouver un carré parfait pour le membre de droite de la forme

$(E - q\phi)\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\cdot(\mathbf{P}c - q\boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{G}mc^2$

où les trois éléments de $\boldsymbol{F}$ sont $\boldsymbol{F}^i$, et où $\boldsymbol{F}^i$ et $\boldsymbol{G}$ sont des matrices *2x2* de matrices *2x2* .

Essayons d'insérer

$$F^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

où σ_i est une des trois matrices conventionnelles de Pauli et vérifions que cela donne:

$(E - q\phi)^2 = (\boldsymbol{P}c - q\boldsymbol{\phi})^2 + m^2c^4$

Ceci conduit à un hamiltonien défini par

$\boldsymbol{H}_{Dirac} = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{P}_{op}c - q\boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{G}mc^2 + q\phi\boldsymbol{I}$

(Souvent, on omet les matrices identités, et l'identité est notée 1)

et l'équation de Dirac pour un potentiel non nul est

$$H_{Dirac}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

3.2 Les équations dynamiques de la RR

En RR nous définissons le quadri vecteur force par:

$$F^\lambda = dp^\lambda/d\tau \tag{3.2.1}$$

pour une particule massive, nous avons

$$p^\lambda = mU^\lambda$$

Le vecteur quadri accélération en RR est donné par:

$$A^\lambda = dU^\lambda/d\tau \tag{3.2.2}$$

ainsi nous pouvons écrire la version relativiste de la seconde loi de Newton :

$$F^\lambda = mA^\lambda \tag{3.2.3}$$

Considérons le référentiel inertiel associé à la particule de test, on peut montrer facilement que:

$$\eta_{\mu\nu}A^{\mu}U^{\nu} = 0 \tag{3.2.4}$$

ce qui donne

$$\eta_{\mu\nu}F^{\mu}U^{\nu} = 0 \tag{3.2.5}$$

Ceci est le théorème qui donne l'énergie d'un travail en RR.

Regardons où $\eta_{\mu\nu}F^{\mu}U^{\nu} = 0$, nous mène:

$$\eta_{\mu\nu}F^{\mu}U^{\nu} = 0$$

$$\eta_{\mu\nu}(dp^{\mu}/d\tau)U^{\nu} = 0$$

$$\gamma^2\eta_{\mu\nu}(dp^{\mu}/dt)u^{\nu} = 0$$

$$\eta_{\mu\nu}(dp^{\mu}/dt)u^{\nu} = 0$$

$$(dp^0/dt)u^0 - (d\mathbf{p}/dt)\cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$u^0 = c$ et $p^0c = E_R$ alors

$$(dE_R/dt) - (d\mathbf{p}/dt)\cdot \boldsymbol{u} = 0$$

$$dE_R = (d\mathbf{p}/dt)\cdot \mathbf{dx}$$

$dE_R = dE_k$ alors

$$\int dE_K = \int(d\mathbf{p}/dt)\cdot \mathbf{dx}$$

$$W = \int(d\mathbf{p}/dt)\cdot \mathbf{dx}$$

Si nous définissons un autre type de force qui n'est pas un quadri vecteur, que nous appellerons force ordinaire par:

$$\boldsymbol{f} = d\mathbf{p}/dt \tag{3.2.6}$$

alors ceci donne:

$$W = \int \boldsymbol{f}\cdot \mathbf{dx}$$

(3.2.7)

ce qui est le théorème pré relativiste qui donne l'énergie d'un travail

Alors la seconde loi de Newton en RR, en termes de force ordinaire est (3.2.6)

$$f^i = dp^i/dt$$

Cette définition peut être utile dans certains cas, mais en général en RR le plus simple est de travailler sur des paramètres tensoriels. Par exemple, développons la relation entre la force ordinaire et l'accélération de coordonnée.

Nous pouvons écrire 3.2.6

$$f^i = m(d/dt)(dx^i/d\tau)$$

Définissons α^λ par

$$\alpha^\lambda = (d/dt)(dx^\lambda/d\tau)$$

(3.2.8a)

qui pour une accélération dans la direction du mouvement donne:

$$\alpha = \gamma^3 a$$

(3.2.8b)

et pour ce cas du mouvement α va être égal à l'accélération propre A**'** qui est l'accélération observée dans le référentiel où la particule est instantanément au repos. Son amplitude peut être calculée dans n'importe quel référentiel inertiel car c'est un invariant $|A'| = (-\eta_{\mu\nu}A^\mu A^\nu)^{1/2}$. C'est l'accélération vraiment "ressentie" par l'observateur et dans le référentiel inertiel où l'observateur est "instantanément » au repos, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A'}$. Nous définissons α selon (3.2.8) également car c'est utile. α, calculé dans n'importe quel référentiel inertiel dont la force est dans la direction du mouvement se révèle être égal à l'accélération propre.

On retrouve la forme Newtonienne

$$f^i = m\alpha^i$$

(3.2.9)

(Remarquons aussi – Quand la force est dans la direction du mouvement, alors la force "ressentie" par un objet qui la subit est égale à la force "ordinaire". Dans ce cas nous avons $F'^{\lambda}_{ress} = f^\lambda = m\alpha^\lambda$)

Nous pouvons exprimer $d\tau$, en termes de dt à par de la dilatation temporelle.

$$f^i = m(d/dt)(\gamma dx^i/dt)$$

En utilisant la règle de chaînage et en simplifiant on obtient:

$$\boldsymbol{f} = \gamma m[\boldsymbol{a} + \gamma^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})/c^2]$$

(3.2.10)

où a^λ est l'accélération de coordonnée.

Le quadri vecteur force en RR est quelquefois appelé la force de Minkowski et est liée au tenseur de champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ par :

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix}$$

(3.2.11)

par

$$F^\lambda = q\eta_{\mu\nu}(U^\mu/c)F^{\nu\lambda}$$

(3.2.12)

De ceci nous pouvons déduire la relation entre les composantes du champ électromagnétique, la vitesse de coordonnée et la force ordinaire: cela donne:

$$\boldsymbol{f} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$$

(3.2.13)

Dans le cas où la force est dans la direction du mouvement (3.2.10) donne :

$$f^i = \gamma^3 m a^i$$

(3.2.11)

Remarquons, que quelle que soit la valeur finie de la force ordinaire, quand u s'approche de c, γ diverge donc l'accélération doit s'annuler

Ceci est bien conforme au fait qu'aucune masse ne peut atteindre la vitesse de la lumière.

Nous avons vu comment c est une vitesse limite pour l'univers. De ce fait, que devient la loi d'addition des vitesses ? Disons qu'un observateur dans un référentiel S' observe un objet à la vitesse u'. Un autre observateur dans un référentiel S observe l'observateur dans le référentiel S' se déplacer à la vitesse v, u' et v étant des vitesses quelconques mais inférieures à c. Si on appelle *u* la vitesse à laquelle l'observateur de *S* voit l'objet se déplacer, on est tenté comme en mécanique classique d'additionner les vitesses et dire que $u = u' + v$, et que cette vitesse doit donc être inférieure à $2c$. Nous utiliserions une mauvaise formule d'addition de vitesses. Considéreons la transformation de coordonnée de Lorentz sous sa forme différentielle.

$$dx = \gamma(dx' + \beta dct')$$

et

$$dct = \gamma(dct' + \beta dx')$$

Pour obtenir la loi correcte d'addition des vitesses faisons le rapport des équations et simplifions.

$$dx/dct = [\gamma(dx' + \beta dct')]/[\gamma(dct' + \beta dx')]$$

simplifions

$$dx/dt = [dx'/dt' + v]/[1 + (dx'/dt')v/c^2]$$

Et maintenant faisons les substitutions suivantes, u = dx/dt et u' = dx'dt' nous obtenons

$$u = (u' + v)/(1 + u'v/c^2) \tag{3.2.12}$$

Ce sont les équations correctes d'addition des vitesses en RR, u' et v étant quelconques mais inférieurs à c, le résultat va toujours être que dans le référentiel *S*, la vitesse *u* observée de l'objet va toujours être inférieure à *"c"*. On peut généraliser cette formule pour l'addition de vitesses dans les directions *y* ou *z* ou des directions quelconques.

Exercices

Problème 3.2.1

Trouver $\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$, $\eta_{\mu\nu}U^\mu A^\nu$, et $\eta_{\mu\nu}U^\mu F^\nu$, $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ en utilisant le fait que la contraction d'un tenseur est un invariant. Quelle est la relation du dernier avec l'invariant de masse? Comment le résultat de $\eta_{\mu\nu}U^\mu F^\nu$ est lié à la dérivée par rapport au temps de la relation qui donne l'énergie d'un travail $(d\mathbf{p}/dt)\cdot\mathbf{v} = dKE/dt$?

Problème 3.2.2

Montrer que l'impulsion d'une particule chargée en mouvement cyclotron ou sur une orbite de rayon *R* dans un champ magnétique est donné par $p = qBR$.

Problème 3.2.3

Utiliser (3.2.10) pour montrer que le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est donné par:

$$\boldsymbol{a} = (q/m)\gamma^{-1}[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{u}/c)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E}/c)]$$

Problème 3.2.4

En utilisant (3.2.2) montrer que $A^{\mu} = U^{\nu}(U^{\mu}{}_{,\nu})$

Problème 3.2.5

Soit un référentiel S' se déplaçant dans la direction x à la vitesse v par rapport à un référentiel S.

Montrer que la force ordinaire sur une particule se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{u}$, par rapport à S, suit la loi de transformation suivante entre les référentiels.

$$f_x' = \frac{f_x - v(\vec{u}\cdot\vec{f})}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad f_x = \frac{f_x' + v(\vec{u}'\cdot\vec{f}')}{\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

$$f_y' = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad f_y = \frac{f_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

$$f_z' = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad f_z = \frac{f_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

3.3 Rotations, fusées, et décalages de fréquence

Nous avons montré que les vitesses ne s'additionnent pas linéairement en RR. Lorsque le mouvement se fait dans une même direction, la loi d'addition est donnée par :(3.2.12)

$$u = (u' + v)/(1 + u'v/c^2)$$

La rapidité θ en fonction de *v est donné par:*

$$\tanh\theta = v/c \qquad (3.3.1)$$

Cette définition est utile, car elle simplifie beaucoup les équations de la dynamique. Ceci parce que les rapidités, à la différences des vitesses en RR s'additionnent linéairement.

$$\theta_u = \theta_{u'} + \theta_v$$

Rappelons la matrice de transformation de Lorentz

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappelons la relation entre la rapidité et γ et $\gamma\beta$.

$$\gamma = cosh\theta$$

(3.3.2a)

$$\gamma\beta = sinh\theta$$

En utilisant ces relations la matrice de transformation de Lorentz devient

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.3.2b)

Si on compare ceci à une matrice de rotation ordinaire on voit pourquoi une transformation de Lorentz peut être assimilée à une rotation dans l'espace temps. Ainsi introduit, la relation entre la transformation de Lorentz et une rotation peut sembler une coïncidence, mais lorsqu'on va envisager la chose en calcul spinoriel, la nature profonde de cette relation va se révéler.

Maintenant nous allons étudier les équations de la dynamique relativiste d'une fusée à un étage. L'équation de la dynamique d'une fusée non relativiste est:

$$\Delta v = v_{ex} ln(m_i/m)$$

(3.3.3)

Ceci nous donne la variation de vitesse Δv de la fusée soumise à une accélération dans une direction par rapport à la vitesse d'éjection des gaz v_{ex} qui est supposée constante, la masse initiale de la fusée m_i et la masse finale de la fusée m après éjection d'une partie de sa masse initiale.

En terme de rapidité θ, l'équation relativiste est équivalente

$$\Delta\theta = (v_{ex}/c) ln(m_i/m)$$

(3.3.4)

La vitesse de la fusée va donc être calculée à partir de sa rapidité (3.3.1).

$$v = c\tanh\theta$$

Remarquons que comme $\tanh\theta < 1$ quelque soit θ, v est toujours inférieur à c, quel que soit la quantité de combustible brûlée et quelle que soit la vitesse d'éjection des gaz. Nous pouvons même considérer l'éjection de tachyons où $v_{ex} > c$ et vérifier que la fusée n'atteindra jamais la vitesse de la lumière.

Pour démontrer (3.3.4) on commence par la conservation de l'énergie et de l'impulsion pour l'état initial et final de la fusée et de l'éjectat m_{fex}.

$$\gamma mv = (m + dm)[\gamma v + d(\gamma v)] + m_{fex}\gamma_{fex}v_{fex}$$

$$\gamma mc^2 = (m + dm)(\gamma + d\gamma)c^2 + m_{fex}\gamma_{fex}c^2$$

On simplifie:

$$0 = \gamma vdm + md(\gamma v) + m_{fex}\gamma_{fex}v_{fex}$$

$$0 = \gamma dm + md\gamma + m_{fex}\gamma_{fex}$$

On élimine $m_{fex}\gamma_{fex}$

$$0 = \gamma vdm + md(\gamma v) - (\gamma dm + md\gamma)v_{fex}$$

On utilise la loi relativiste d'addition des vitesses:

$$0 = \gamma vdm + md(\gamma v) - (\gamma dm + md\gamma)[(v - v_{ex})/(1 - vv_{ex}/c^2)]$$

On simplifie:

$$0 = [\gamma vdm + md(\gamma v)]\ (1 - vv_{ex}/c^2) - (\gamma dm + md\gamma)(v - v_{ex})$$

On change de variable pour utiliser la rapidité :

$$0 = [\sinh\theta dm + md(\sinh\theta)]\ [1 - \tanh\theta(v_{ex}/c)]c - [\cosh\theta(dm) + md(\cosh\theta)](\tanh\theta - v_{ex}/c)c$$

On simplifie:

$$0 = [\sinh\theta dm + m\cosh\theta d\theta]\ [1 - \tanh\theta(v_{ex}/c)] - [\cosh\theta dm + m\sinh\theta d\theta](\tanh\theta - v_{ex}/c)$$

$$0 = \sinh\theta dm + m\cosh\theta d\theta - (\sinh\theta dm + m\cosh\theta d\theta)\tanh\theta(v_{ex}/c) - (\cosh\theta dm + m\sinh\theta d\theta)\tanh\theta + (\cosh\theta dm + m\sinh\theta d\theta)(v_{ex}/c)$$

$$0 = \sinh\theta dm + m\cosh\theta d\theta - (v_{ex}/c)\sinh\theta\tanh\theta dm - (v_{ex}/c)m\sinh\theta d\theta - \sinh\theta dm - m\sinh\theta\tanh\theta d\theta + (v_{ex}/c)\cosh\theta dm + (v_{ex}/c)m\sinh\theta d\theta$$

$$0 = m\cosh\theta d\theta - (v_{ex}/c) \sinh\theta\tanh\theta dm - m\sinh\theta\tanh\theta d\theta + (v_{ex}/c)\cosh\theta dm$$

$$0 = (m\cosh\theta - m\sinh\theta\tanh\theta)d\theta + (v_{ex}/c)(\cosh\theta - \sinh\theta\tanh\theta)dm$$

$$0 = m(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta)d\theta + (v_{ex}/c)(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta)dm$$

$$0 = md\theta + (v_{ex}/c)dm$$

$$d\theta = -(v_{ex}/c)dm/m$$

après intégration, on obtient (3.3.4) :

$$\Delta\theta = (v_{ex}/c)\ln(m_i/m)$$

Considérons maintenant l'accélération propre du vaisseau pour un mouvement dans une direction (3.2.8b) :

$$\alpha = \gamma^3 a = \cosh^3\theta dv/dt = \cosh^3\theta(dv/d\theta)(d\theta/dm)(dm/dt')(dt'/dt)$$

$$\alpha = \cosh^3\theta(c\,\mathrm{sech}^2\theta)(-(v_{ex}/mc))(dm/dt')\mathrm{sech}\theta$$

$$\alpha = (v_{ex}/m)(dm/dt')$$

Si l'accélération propre est constante, alors le résultat de l'intégration est :

$$\alpha\Delta t'/c = (v_{ex}/c)\ln(m_i/m) = \Delta\theta$$

Si $v = 0$ à $t = t' = 0$ (conditions initiales) :

$$\alpha t'/c = \theta$$

Si la fusée part au repos et est soumise à une accélération propre constante α , alors l'équation peut s'écrire :

$$v = c\tanh(\alpha t'/c)$$

(3.3.5)

Ces conditions initiales donnent également:

$$v = c\tanh[(v_{ex}/c)\ln(m_i/m)]$$

(3.3.6a)

soit

$$v = c\frac{\left(\frac{m_i}{m}\right)^{2\frac{v_{ex}}{c}} - 1}{\left(\frac{m_i}{m}\right)^{2\frac{v_{ex}}{c}} + 1}$$

(3.3.6b)

En inversant ces résultats on obtient

$$m_i/m = exp[(c/v_{ex})tanh^{-1}(v/c)]$$

(3.3.6c)

Soit

$$m_i/m = [\gamma(1 + \beta)]^{c/vex}$$

(3.3.6d)

Se déplacer à accélération propre constante donne également:

$$\beta = tanh(\alpha t'/c)$$

(3.3.7a)

$$\gamma = cosh(\alpha ct'/c^2)$$

(3.3.7b)

$$\gamma\beta = sinh(\alpha ct'/c^2)$$

(3.3.7c)

En utlisant les équations du type Lorentz

$$\begin{gathered} ct = \int^{t'}\gamma dct' + \gamma\beta x' \\ x = \gamma x' + \int^{t'}\gamma\beta dct' \\ y = y' \\ z = z' \end{gathered}$$

(3.3.8)

On obtient une bonne transformation globale de coordonnée du référentiel accéléré du vaisseau dans un référentiel inertiel. Si on choisi comme référentiel inertiel celui dans lequel il démarre à $t' = 0$, ceci devient

$$ct = (c^2/\alpha + x')\sinh(\alpha ct'/c^2)$$
$$x = (c^2/\alpha + x')\cosh(\alpha ct'/c^2) - c^2/\alpha$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

(3.3.9)

Il y a une différence entre la fréquence qu'on *observe* comme émise d'une source et la fréquence qu'un observateur vraiment *voit* venant de la source. Ceci est également valable en physique non relativiste. Par exemple si une voiture passe devant vous, le son est plus aigu lorsqu'elle se rapproche, et plus grave, lorsqu'elle s'éloigne (effet Doppler). Ceci est la fréquence qu'on *entend*.

On peut utiliser la formule habituelle de l'effet Doppler et en utilisant la vitesse à laquelle se déplace la source et calculer la fréquence émise réellement dans notre référentiel de coordonnées. Ceci est la fréquence qu'on *observe*. La formule de décalage Doppler relativiste est réellement la même que celle non relativiste, sauf qu'elle est écrite en termes de fréquence émise dans le *référentiel de la source* au lieu d'être la fréquence émise observée. Il se trouve juste que dans le cas non relativiste, ces deux visions sont les mêmes. Dans le décalage Doppler Relativiste, on tient compte que la dilatation temporelle entraîne que la fréquence émise qu'on observe est différente alors de la fréquence dans le référentiel de l'objet qui l'émet.

Si on est au repos par rapport au milieu de propagation de l'onde, alors la formule classique de décalage Doppler est:

$$f = f_0/[1 + (v/c)\cos\theta]$$

(3.3.10)

Pour un signal sonore, les relations suivantes sont utilisées,

« f » est la fréquence qu'on *entend* (pour le son)

« f_0 » est la fréquence qu'on *observe* avoir été émise dans notre référentiel au moment de l'émission. C'est le transverse soit : θ = fréquence à $\pi/2$ pour f.

« v » est la vitesse de l'émetteur par rapport au milieu de propagation des ondes au moment où l'onde a été effectivement émise.

« c » est la vitesse des ondes dans le milieu, par rapport au milieu

« θ » était l'angle du mouvement de la source par rapport à nous, au moment où la fréquence entendue a été effectivement émise

Décalage Doppler relativiste et décalage Doppler classique. Cette formule est correcte pour le décalage Doppler relativiste avec les modifications suivantes des relations.

« f » est la fréquence qu'on *voit*.

« f_0 » est la fréquence qu'on *observe* avoir été émise dans notre référentiel au moment de l'émission. C'est le transverse, soit : θ = fréquence à $\pi/2$ pour f.

« v » est la vitesse de l'émetteur dans notre référentiel au moment où la lumière a été effectivement émise.

« c » est la vitesse, invariante de Lorentz, de la lumière dans le vide.

«θ» était l'**angle** du mouvement de la source par rapport à nous au moment ou la fréquence entendue a été effectivement émise, **évalué dans notre référentiel**. **L'angle est différent selon l'autre référentiel et alors l'utilisation de l'angle des autres référentiels, change la forme de l'équation.**

Pour écrire maintenant en terme de la fréquence émise selon le référentiel de la source, nous commençons par écrire les périodes dans les deux référentiels en terme de dilatation temporelle.

$$T_0 = T_0'(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

Puis relions la période à la fréquence.

$$f_0 = 1/T$$

$$f_0' = 1/T_0'$$

En combinant ces resultants:

$$f_0 = f_0' (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Insérons la formule de décalage Doppler, cela donne :

$$f = f_0' (1 - v^2/c^2)^{1/2}/[1 + (v/c)\cos\theta] \tag{3.3.11}$$

La longueur d'onde de la lumière sera $\lambda = c/f$, soit.

$$\lambda = \lambda_0' [1 + (v/c)\cos\theta]/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \tag{3.3.12}$$

Ensuite considérons le cas d'un objet se déplacement dans la direction de l'observateur, $\theta = \pi$. Alors la simplification algébrique donne:

$$f = f_0' [(c + v)/(c - v)]^{1/2} \tag{3.3.13}$$

$$\lambda = \lambda_0' [(c - v)/(c + v)]^{1/2}$$

Si l'objet se déplace dans la direction opposée à l'observateur θ = 0, ce qui donne

$$f = f_0' [(c - v)/(c + v)]^{1/2}$$

$$\lambda = \lambda_0' [(c + v)/(c - v)]^{1/2} \qquad (3.3.14)$$

Exercices

Problème 3.3.1

Considérons une fusée idéale faite de matière/antimatière avec $v_{ex} = c$. Quel doit être le rapport de masse m_i/m pour atteindre *(4/5)c*? Même si c'était technologiquement possible de faire cela, ne pensez vous pas que tant d'antimatière poserait un problème de sécurité.

Problème 3.3.2

Considérons une fusée idéale faite de matière/antimatière avec $v_{ex} = c$. Quel doit être le rapport de masse m_i/m pour faire le voyage aller retour du problème 1.2.4 ?

Problème 3.3.3

A quelle longueur d'onde voit on une source a *557*nm de longueur d'onde dans son référentiel, approchant à (*5/13*)c?

Problème 3.3.4

a. Montrer que 3.3.6a entraîne 3.3.6b

b. Montrer qu'en inversant 3.3.6b on obtient 3.3.6d

Problème 3.3.5

Montrer que la formule relativiste (3.3.13) pour une source se déplaçant vers un observateur peut s'écrire :

$$v = c\tanh[\ln(f/f_0')]$$

soit

$$f/f_0' = \exp[\tanh^{-1}(v/c)]$$

et dans le cas où elle s'éloigne 3.3.14 peut s'écrire

$$v = c\tanh[\ln(f_0'/f)]$$

soit

$$f_0'/f = \exp[\tanh^{-1}(v/c)]$$

Ces deux formules sont plus faciles à utiliser sur une calculatrice scientifique

Problème 3.3.6

Montrer que la position d'un vaisseau soumis à une accélération propre constante conformément à 3.3.9 est donnée en fonction du temps propre par :

$$x = (c^2/\alpha)[\cosh(\alpha\tau/c) - 1]$$

a. Utiliser 3.3.9 pour montrer que la montre qui donne le temps propre τ de l'observateur dans le référentiel du vaisseau est liée à la coordonnée temps t par : $\alpha t/c = \sinh(\alpha\tau/c)$

b. Utiliser les résultats de "*a*" et 3.3.5 pour montrer que :

$$v = \alpha t/[(1 + \alpha^2 t^2/c^2)^{1/2}]$$

et regarder comment se comporte aux limites v pour des temps courts et long pour l'équation de vitesse du problème et pour celle de (3.3.5).

c. Montrer que la position du vaisseau soumis à une accélération propre constante considéré dans l'équation 3.3.9 est une fonction du temps propre donné par : $x = (c^2/\alpha)[\cosh(\alpha\tau/c) - 1]$

et utiliser les résultats de "*a*" pour montrer que :

$$(1 + \alpha x/c^2)^2 - (\alpha t/c)^2 = 1.$$

Remarquons que ceci est l'équation d'une hyperbole.

Problème 3.3.7

Un vaisseau spatial de masse constante est propulsé par une force externe. La force ordinaire sur le vaisseau est constante et est dans la direction du mouvement, nous pouvons donc utiliser 3.2.11. Utiliser ceci et 3.2.9 pour montrer que :

$$v = \alpha t/[(1 + \alpha^2 t^2/c^2)^{1/2}]$$

et utiliser ce résultat pour montrer que:

$$(1 + \alpha x/c^2)^2 - (\alpha t/c)^2 = 1.$$

Alors comparer les résultats à ceux du problème 3.3.6.